MENTOR

Matila C. Ghyka

FILOSOFIA ȘI MISTICA NUMĂRULUI

univers enciclopedic

Colecţia MENTOR

MATILA C. GHYKA

FILOSOFIA ŞI MISTICA

NUMĂRULUI

MATILA C. GHYKA s-a născut în 1881 la Iaşi. Era strănepot al lui Grigore Ghyka X, ultimul domnitor al Moldovei până la Unirea Principatelor. Năzuind, după cum mărturiseşte în Memoriile sale, spre o personalitate de „om universal[44], care să întrunească virtuţile lui Bartolomeo Colleoni şi ale lui Pico della Mirandola, Matila Ghyka a făcut studii strălucite de inginerie la Academia Navală Franceză, studii de litere şi de jurisprudenţă. Ofiţer de marină, diplomat, matematician, filosof, poet şi memorialist, el a elaborat o teorie filosofică şi estetică în care formaţiunile naturale (organisme vii şi sisteme cristaline) şi operele de artă sunt structurate deopotrivă de un ansamblu de analogii şi proporţii existente, matematic formalizabile. După o îndelungată carieră diplomatică, la sfârşitul celui de al doilea război mondial, a fost profesor de estetică la Universitatea din Los Angeles, iar după doi ani la Universitatea din Londra. S-a stins din viaţă la Londra, în 1965.

Alte opere teoretice:

Esthetique desproportions dans la nature et dans Ies arts, Paris, NRF, Gallimard, 1926. Le nombre d'or. Rites et rythmes pitagoriciens dans le dăveloppement de la civilization occidentale, Paris, NRF, Gallimard, 1931,2 voi. (introducere de Paul Valăry). Essai surle rythme, 1938. The Geometry of Art and Life, New York, Sheed and Word, 1946.

Traducere de DUMITRU PURNICHESCU
Postfaţă de CORNEL MIHAI IONESCU

univers enciclopedic Bucureşti, 1998
Coordonatorul colecţiei: CORNEL MIHAI IONESCU
Redactor: MONICA JITĂREANU
Copera: VENIAMIN & VENIAMIN
Tehnoredactare computerizată: LILIANA KIPPER
OFELIA COŞMAN
Matila Ghyka PHILOSOPHIE ET MYSTIQUE DU NOMBRE Copyright © 1952 by Payot Paris

Toate drepturile asupra acestei ediţii aparţin Editurii UNIVERS ENCICLOPEDIC

ISBN 973-9243-35-5

AVERTISMENT

al editorului francez la ediţia a doua, din 1973

Prima ediţie a acestei lucrări a apărut în 1952, iar autorul ei a decedat înainte de a fi putut pune la punct o nouă ediţie.

Datorită originalităţii personalităţii şi a tezelor lui Matila Ghyka ni s-a părut util, totuşi, să reproducem ca atare textul primei ediţii. De asemenea, am păstrat figurile şi schiţele pe care autorul le desenase în 1952. Chiar dacă, în planul execuţiei, aceste documente sunt de o calitate mediocră, ele oferă privilegiul de a reproduce fidel studiul lui Matila Ghyka, întocmai cum, pe parcursul manuscriselor, a ieşit de sub pana sa.

Ceea ce cartea pierde în planul calităţii tehnice, regăseşte din plin în cel al autenticităţii.

CUPRINS

Capitolul I

Noţiunea de număr — Ideile şi numerele — Numărul în Biblie, în Caldeea şi în Egipt — Concepţia grecească despre număr: cele trei definiţii — Numere vulgare şi numere divine

Capitolul II

Societatea Numerelor — Mistica pitagoreică a numerelor pure — Monadă, diadă, triadă, tetraktys, pentadă, decadă

Capitolul III

Armonia numerelor şi a Cosmosului în doctrina lui Pythagoras — Corelaţia Univers-Templu-Om — Marea piramidă — Triunghiul lui Pythagoras şi triunghiurile diofantine — Triunghiul lui Pythagoras transmis de Caldeea şi Egipt Europei neolitice

Capitolul IV

Viaţa şi legenda lui Pythagoras — Platou şi neopitagorismul - Cea de-a VII-a scrisoare a lui Platon

Capitolul V

Gândirea occidentală şi principiul analogiei — Proporţia, reflectare matematică a analogiei — Teoria pitagoreică a proporţiilor — Secţiunea de Aur — „Symmetria“ lui Vitruviu şi principiul analogiei al lui Thiersch

Capitolul VI

Numerele şi formele-numere figurate plane şi solide ale celor vechi şi ale lui Descartes — Numere figurate cu n dimensiuni — Triunghiul, piramida şi hiperpiramida lui Pascal

Capitolul VII

Cabala şi numerele — Influenţa Pitagorismului asupra gândirii creştine şi ebraice — Cabală, gnoză şi magie — Pentacluri, Faust,

Agrippa şi Paracelsus

Capitolul VIII

Avatarele pentagramei — Corporaţiile de constructori — Transmiterea planurilor de construcţie — Societăţile secrete chinezeşti — Concepţia chinezească despre număr: permutări şi combinări — „Cartea transformărilo

Capitolul IX

Numărul şi matematica modernă — Numere raţionale, întregi şi fracţionare — Numeraţia în baze diferite — Concepţia despre infinitul actual - Principiul inducţiei totale — Paradoxul lui Borel — Fracţiile periodice

Capitolul X

Numere iraţionale — Numere algebrice şi transcedente — Numere reale şi imaginare — Câteva numere remarcabile — Numerele transfinite ale lui Cantor

Capitolul XI

Geometrii cu un număr oarecare de dimensiuni — Tot despre politopii cu patru dimensiuni — Echipartiţiile spaţiului şi ale hiperspaţiilor - Geometrii neeuclidiene

Capitolul XII

Permutări şi combinări — Tot despre triunghiul lui Pascal — Polinomul lui Leibniz — Piramida şi hiperpiramida lui Pascal — Pătrate magice

Capitolul XIII

Logistica — Axiomaticile lui Peano şi Hilbert — Logica clasică, logica simbolică şi logica pozitivistă

Capitolul XIV

Cibernetica

Capitolul XV

De la număr la abstracţia pură — Teoria grupurilor şi invarianţilor — Relativitate şi mecanică cuantică ondulatorie — Principiul minimei acţiuni

Capitolul XVI

Număr şi poezie — Notaţia lui Pius Servien — Dihotomia limbajului — Limbajul ştiinţific şi limbajul liric — Metafora şi analogia

Capitolul XVII

Numărul şi muzica — Teoria matematică a gamelor — Modulaţia, proporţia, euritmie

Capitolul XVIII

Numărul şi chimia — Chimia anorganică şi chimia organică — Tabelul lui Mendeleev şi tabelul lui Mendel — Teoria lui Schroedinger despre mutaţii — Numărul şi undele

Concluzii

CAPITOLUL I

NOŢIUNEA DE NUMĂR - IDEILE ŞI NUMERELE - NUMĂRUL ÎN BIBLIE, ÎN CALDEEA ŞI ÎN EGIPT - CONCEPŢIA GRECEASCĂ DESPRE NUMĂR:

CELE TREIDEFINIŢII

-NUMERE VULGARE ŞI NUMERE DIVINE

> *Şi atunci toate aceste specii astfel alcătuite şi-au primit de la Orânduitorul lor înfăţişarea, prin acţiunea Ideilor şi a Numerelor. (TIMAIOS)*

Fraza din *Timaios,* care serveşte drept epigraf acestui capitol şi, aş putea zice, acestui întreg studiu, rezumă într-o efigie de medalie concluziile lui Platon cu privire la Univers, precum şi pe acelea ale inspiratorului său, Pythagoras: teoria arhetipurilor şi „Legea Numărului". Se întâmplă că punctele de vedere şi consecinţele fizicii matematice de astăzi se potrivesc şi cu aceste două rânduri din Platon; ele par să lumineze întreaga dezvoltare de mai târziu a gândirii occidentale.

Bertrand Russell a fost primul care a remarcat întoarcerea ştiinţei moderne la disciplinele pitagoreice; se gândea, fireşte, pe de o parte la relativitatea generală, aşa cum a fost prezentată de Einstein şi, pe de altă parte, la teoria cuantelor şi la mecanica ondulatorie datorate lui Max Planck şi lui Louis de Broglie.

Ne vom ocupa aici, în mod cu totul special, de Număr; înainte să purcedem la cercetarea rolului Numărului şi al Numerelor de-a lungul veacurilor, se cuvine să examinăm mai întâi originea acestei noţiuni. Pentru aceste începuturi îndepărtate nu avem altă călăuză decât aritmetica primitivă remarcată la populaţiile înapoiate care mai există şi în ziua de astăzi şi putem să ne închipuim fără teama de a ne înşela prea mult, prin analogie, origini asemănătoare la strămoşii noştri aurignacieni, magdalenieni, sumerieni, semiţi, sau mediteranieni propriu-zişi. Chiar la populaţiile zise sălbatice, ideile referitoare la Număr prezintă noţiuni asociate cu filosofia şi magia. Numărul Unu este totodată unitate de calcul (uneori singura, numerele cuprinzând numai cele două concepţii de „Unu“ şi „Mai mulţi“ sau ,,Muk“) şi simbol al unităţii în general, ca şi al identităţii Eului cu el însuşi, ca opus restului Universului, ceea ce de altfel implică deja o dualitate.

Stadiul următor este atins o dată cu conceptul explicit al numărului Doi şi al Dualităţii, origine a conceptului pe care grecii l-au

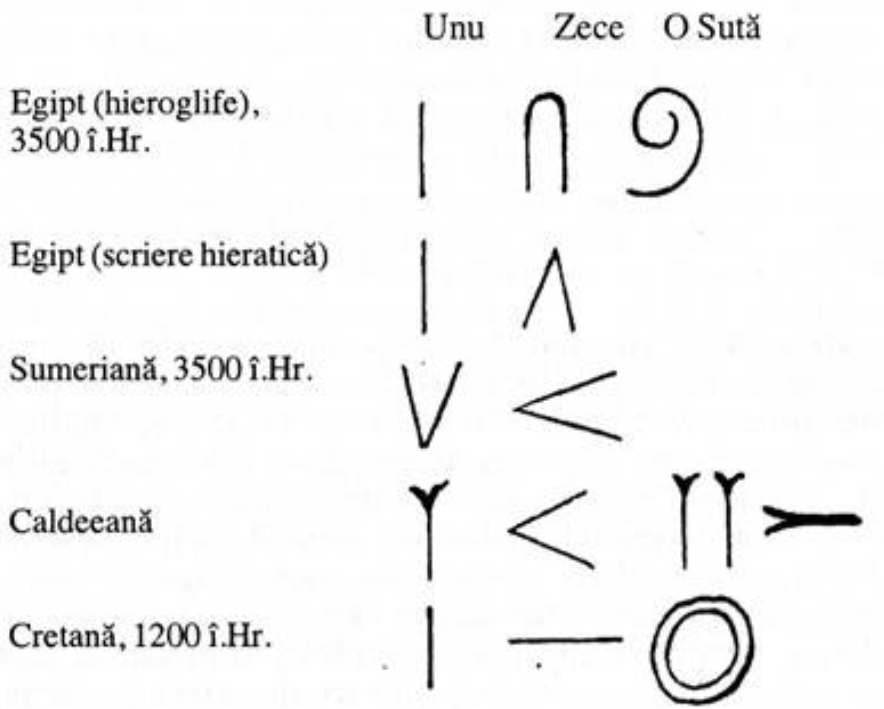
numit „Acelaşi şi Altul", Altul fiind mulţimea nedefinită a numerelor mai mari decât Unu. Anumite triburi australiene şi boşimanii din Africa Meridională folosesc această numeraţie diadică, cu simboluri doar pentru unu şi doj; astfel, orice alt număr este o combinaţie de 1 şi 2, de pildă, 5 = 2 + 2 + 1. Alţi primitivi (în California, de exemplu) folosesc o numeraţie în care patru este numărul cel mai mare (ex.: 7 = 4 + 3), alţii (Arowaks din America de Sud) au o numeraţie cvinară (firească din pricina numărului de degete), alţii (în Africa) o numeraţie hexadică, avându-1 pe 6 drept cel mai mare număr.

Dacă, în loc să-i cercetăm pe contemporanii noştri, efectuăm o investigaţie în timp până la începuturile civilizaţiei noastre, sau mai degrabă până la apariţia primelor documente scrise care au ajuns până la noi, găsim la sumerienii din Mesopotamia (către 3500 î.Hr.) folosirea unui sistem duodecimal sexagesimal inspirat, fără îndoială, de ciclul lunar. Dimpotrivă, evreii şi ceilalţi semiţi, amoriţii, fenicienii, arabii ca şi arienii din India, asemeni egiptenilor (inscripţie datând tot din anul 3500 î.Hr.), preferau un sistem cu bază zecimală. Semiţii babilonieni şi caldeeni din ultimele două milenii înaintea erei noastre au îmbinat sistemele zecimal şi sexagesimal sau duodecimal.

Datorită cercetărilor lor astronomice şi a stabilirii unui calendar destul de precis, mayaşii din Yucatan aveau deja, către anul 500 î.Hr., un sistem de numeraţie precis cvinar-duodecimal, adică fondat pe 5 şi 20 [simboluri respective - şi (.)]. Literele alfabetului grec, apoi ale celui roman, au fost împrumutate din alfabetul fenician (către 1000 î.Hr.); fenicienii şi evreii, apoi grecii au folosit literele alfabetului drept cifre, cu litere speciale pentru zece, o sută, o mie. Zecele ebraic, de pildă, era Yod sau G aspirat; în cabală Zece a fost numărul perfect şi a devenit acel G din pentaclurile magice, apoi din Steaua strălucitoare (pentagon înstelat sau pentagramă) masonică. La fel ca la primitivi, primele calcule ale timpului au fost efectuate mai întâi cu 5 apoi cu 10 degete, pe urmă cu pietricele - de unde cuvântul calcul (de la calculus, pietricică) -, iar mai târziu cu ajutorul abacelor cu bile (China, Rusia), care permiteau şi operaţii mai complicate.

Simboluri de numeraţie

Simboluri de numeraţie



Acest domeniu al numeraţiei la primitivi a fost studiat în detaliu în lucrări speciale şi nu voi vorbi aici mai pe larg despre conţinutul lor, decât doar pentru a nota, de pe acum, că în Grecia sau, mai degrabă, în Magna Graecia, înlocuind numerele cu grupuri de puncte aranjate geometric, pitagoreicii au dezvoltat disciplina Numerelor Figurate, care le-a îngăduit să priceapă, în mod direct, corelaţiile dintre numere şi figurile geometrice plane şi în spaţiu, apoi să transporte numărul în centrul unei metafizici purificate care, o dată cu Pythagoras, a făcut din acesta arhetipul sau paradigma prin excelenţă a unei doctrine rezumată de „Totul este rânduit după Număr“, şi în care a fost dat Universului numele Cosmos (lume armonios ordonată). Chiar cuvintele cosmos şi filosofie sunt, după o tradiţie necontestată, atribuite lui Pythagoras.

Dar înaintea grecilor, care au studiat temeinic numerele întregi şi fracţionare, şi apoi, prin intermediul diagonalei pătratului ($\sqrt{2}$ pentru un pătrat cu latura 1) şi al teoremei ipotenuzei, au descoperit numerele iraţionale, trebuie să-i menţionăm din nou pe caldeeni şi pe egipteni; cu toate că nu au căutat, precum mai târziu pitagoreicii, să despartă ideea abstractă a Numărului de folosirea ei practică, datorită

lor aritmetica şi geometria aplicată (cea a arpentorului, etimologia însăşi a cuvântului *geometrie*) au făcut progrese de care grecii au profitat. Civilizaţia caldeeană, sau mai curând sumeriană, este, într-un anumit sens, mama culturilor occidentale; în Mesopotamia superioară omul neolitic inaugura, la începutul celui de al Vl-lea mileniu înaintea erei noastre, civilizaţia propriu-zisă, clădind primele sate, apoi primele cetăţi, cultivând plante comestibile (grâu şi orz), domesticind unele animale, modelând oale încă de pe atunci remarcabile. La Eridu, cu vreo 4500 de ani înaintea erei noastre, se năştea cea dintâi civilizaţie urbană cu temple şi palate. Anumiţi etnologi postulează pentru protosumerieni, pentru populaţiile neolitice din bazinul dunărean (reprezentante principale ale cultului Marii Zeiţe Mame, făuritori ai „ceramicii pictate") şi pentru chinezii din epoca legendară a celor Cinci şi a celor Trei împăraţi, o origine comună, având drept punct de plecare nord-vestul Rusiei actuale, între Marea Baltică şi Marea Albă; ar putea fi vorba de rămăşiţe protoariene, ramuri din rasa magdaleniană sau chiar aurignaciană. Dar dezvoltarea matematicii caldeene şi egiptene a fost favorizată în egală măsură de tehnica adoptată pentru măsurarea câmpurilor terestre şi metoda referitoare la distanţele şi traiectoriile cereşti, în special prezicerile de eclipse, calendarul lunar, aşezarea zodiacului au inspirat popoarelor ciclului caldeean - sumerieni, akkadieni, babilonieni, asirieni, ahemenizi sistemul de numeraţie bazat pe numerele 12, 20, 60 sau sistemul sexagesimal peste care, sub influenţa semiţilor babilonieni, s-a suprapus sistemul zecimal.

În Egipt, unde, ca şi la semiţi, domina numeraţia zecimală, s-a dezvoltat mai curând geometria arpentorilor[1] şi a arhitecţilor decât cea a astronomilor şi astrologilor, cu toate că orientarea spre Polul Nord ceresc a galeriei descendente a Marii Piramide era stabilită cu rigoare. Dar precizia aproape halucinantă a planurilor, a templelor şi a mormintelor egiptene, ca şi aceea a stelelor şi a basoreliefurilor asociate, dezvăluie aplicarea unei curioase şi originale aritmetici a fracţiilor, combinată, după cum vom vedea în capitolul următor, cu folosirea unui anumit şir definit prin recurenţă cu doi termeni, ce îngăduie să se obţină aproximaţii, cât mai riguroase cu putinţă, ale lungimilor iraţionale descoperite şi folosite mai târziu de greci.

Totuşi, în ritualul religios sau magic egiptean numerele, îndeosebi ceea ce pitagoreicii au numit „Numărul Pur" sau „Divin", nu au atins importanţa acordată cuvintelor, a cuvintelor încărcate de putere pe care le deţineau Isis, zeiţa cu şapte văluri, şi Thot-Hermes.

Găsim în Biblie, sau ni se pare că găsim, în „Cartea înţelepciunii lui Solomon", cea dintâi menţionare a numărului ca abstracţie: „Dumnezeu a rânduit totul cu măsură, cu număr şi cu cumpănă".

Dacă această frază i s-ar fi datorat lui Solomon însuşi, am fi putut

considera că a inspirat doctrina pitagoreică a Numărului, dar exegeza biblică a dovedit că această „Carte a înţelepciunii" a fost redactată în cursul celui de al doilea secol dinaintea erei noastre de un evreu din Alexandria, care avea, pesemne, legături cu renaşterea pitagoreică, al cărei centru de răspândire era Alexandria. Aşadar, nu Biblia a influenţat, în această privinţă, gândirea greacă; numărul a fost mai întâi considerat „arhetip" chiar în Grecia, sub egida lui Pythagoras (580-500 î.Hr.) şi tot aici maestrul din Samos a formulat celebrul

„Totul este rânduit după număr"

transmis prin „Hieros Logos" sau Discursul Sacru, redactat după moartea sa de către câţiva discipoli, printre care se număra, pesemne, şi fiul său.

Aristoxenos din Tarent, citat de Stobaios, scrie de asemenea: „Pythagoras (gândea că) toate lucrurile sunt orânduite după Numere".

Găsim şi în *Theologumena Arithmeticae*, scriere a lui Nicomachos din Gerasa[2], neopitagoreic de la începutul erei noastre, pe care vom mai avea prilejul să-l citãm de mai multe ori, pasajul următor:

„Haosul primitiv, lipsit fiind de ordine şi de formă, şi de tot ceea ce deosebeşte potrivit categoriilor calităţii, ale cantităţii etc., a fost organizat şi rânduit după Număr".

Pitagoreicii, adică membrii Confreriei întemeiate în Magna Graecia de Pythagoras, au dat trei definiţii numărului, plecând de la trei puncte de vedere diferite. Numărul este, mai întâi, împărţit în Numere Pure sau Divine, de care se ocupă mistica Numărului (aritmologia), în Numere ştiinţifice şi în numere concrete, de care se ocupă calculul propriu-zis al negustorilor.

Potrivit lui Nicomachos, numerele ştiinţifice sunt împărţite, la rândul lor, în trei categorii:

1° O multitudine limitată (am zice astăzi: mulţime numărabilă finită). Este acel ttooottic propriu-zis.

2° O alcătuire de monade, adică de unităţi (Theon din Smirna, circa A. D., în *Expositio Rerum Mathematicorum ad legendum Platonis utilium*, scrie: „Pitagoreicii considerau toţi termenii din seria naturală a numerelor drept principii, astfel încât, de exemplu, printre obiecte sensibile trei (triada) este principiul pentru trei şi patru (tetrada) principiul tuturor patru, etc...".

Este aproape definiţia lui Bertrand Russell a numerelor considerate drept „clase de clase". Aceste unităţi, aceste monade pot fi puncte şi atunci pot da naştere lumii, care e şi geometrică şi algebrică, a numerelor „figurate", plane (triunghiulare, pătrate, pentagoane etc...) şi solide (piramidale sau tetraedice, cubice, paralelipipedice etc.) pe care primii maqematikoi din confrerie le-au studiat deja în Sicilia.

3° Un val, o curgere de monade:

Am văzut deja că, în afara acestor numere ştiinţifice şi a numerelor obişnuite, pitagoreicii făceau o distincţie suplimentară între aceste două categorii şi ceea ce ei numeau „Numere pure" sau „Divine". Cel mai bun lucru pe care îl pot face este să reproduc aici prezentarea Numărului Divin de către Nicomachos din Gerasa în Theolegumenele sale: „Principiile Numărului şi ale tuturor celorlalte lucruri sunt «Acelaşi şi Altul» (sau calitatea de a fi acelaşi lucru sau de a fi altceva[3]). Cei din vechime, care sub îndrumarea spirituală a lui Pythagoras au dat cei dintâi ştiinţei o formă sistematică, au definit filosofia ca iubirea de Cunoaştere... Cele necorporale - precum calităţile, cantităţile, egalitatea... relaţiile, poziţiile... locurile, timpul... - sunt, în esenţă, imuabile şi interschimbabile, dar pot participa, accidental, la vicisitudinile corpurilor cărora le sunt atribuite.

Şi dacă, în mod accidental, cunoaşterea se ocupă şi de corpuri, suporturi materiale ale lucrurilor necorporale, totuşi de acestea din urmă ea se va lega în mod deosebit. Căci aceste lucruri imateriale, veşnice, constituie adevărata realitate. Iar ceea ce este supus alcătuirii şi distrugerii... (materia, corpurile) nu este actualmente real prin esenţă (Putem observa de pe acum cât de mult se înrudeşte această concepţie despre lume cu aceea pe care ne-a dat-o fizica matematică modernă, în care nu contează decât structura, invariantul.)

Tot ceea ce natura a orânduit sistematic în Univers se vădeşte, în părţile sale ca şi în tot întregul, a fi fost stabilit şi potrivit cu Numărul, prin prevederea şi gândirea celui ce pe toate le-a zămislit; căci modelul era fixat, precum o schiţă preliminară, prin puterea suverană a numărului preexistent în spiritul lui Dumnezeu creator al lumii; număr-idee ce este, în chip pur, imaterial din toate punctele de vedere, dar totodată esenţă adevărată şi veşnică, astfel încât în armonie cu numărul, ca după un plan artistic, au fost create toate acestea, şi timpul, mişcarea, cerurile, astrele, precum şi ciclurile tuturor lucrurilor."

Precum odinioară Nicomachos, ştiinţa a suprimat iarăşi barierele între matematică şi logică: teoria mulţimilor, a claselor şi a relaţiilor a lui Cantor-Russell-Whitehead, axiomatica lui Hilbert, calculul tensorial şi cercetarea, cu ajutorul lui, a invarianţilor şi constantelor cosmice sunt capitolele unei singure ştiinţe, noua Logistică.

Acestor definiţii ale Numărului, datorate lui Russell şi lui Cantor, li se adaugă, după cum am văzut, nuanţa metafizică ce face din număr marele arhetip, simbolul esenţial şi, de asemenea, maestrul formelor.

Platon, după cum s-a arătat la începutul acestui capitol, adăugase Numerelor Ideile, ca instrumente principale ale Marelui Ordonator sau „Dumnezeu orânduind cu măiestrie"; ştim ce înrudire curioasă asocia idei, forme, imagini în gândirea grecească. EiSoc este o formă precum

şi o idee; nu este atât o stare mentală cât modelul ideal (arhetip sau paradigmă) către care năzuieşte gândirea. Derivatul său €i6o\ov (de unde *idol*) este imaginea propriu-zisă. Forma-gând poate fi uneori o lege care guvernează un aranjament formal, ca în definiţia: „Forma este legea în virtutea căreia motivul se repetă."

Aceasta ne duce cu gândul la ritm.

CAPITOLUL II

SOCIETATEA NUMERELOR - MISTICA PITAGOREICĂ A NUMERELOR PURE-MONADĂ, DIADĂ, TRIADĂ, TETRAKTYS, PENTADĂ, DECADĂ

Dumnezeu a făcut numerele întregi, toate celelalte sunt opera oamenilor.
(KRONEKER)

Asocierea etimologică reqmovvvV-ariqmovV , ritm - număr (amândouă derivate din rew,rein, („a curge"), subliniază caracterele comune ale numerelor şi ale ritmului ca flux monadic în geneza numerelor (flux neîntrerupt ca o curgere, dar care produce, la fiecare treaptă, numere foarte individuale), şi ca flux dinamic cu repetiţii sau periodicităţi în cazul ritmului. Tuturor definiţiilor care, de-a lungul epocilor, au fost date ritmului, o prefer pe cea a lui Pius Servien:

„Ritmul este periodicitate percepută. El acţionează în măsura în care o asemenea periodicitate deformează în noi curgerea obişnuită a timpului. Astfel, orice fenomen periodic perceptibil simţurilor noastre se desprinde de mulţimea fenomenelor neregulate... pentru a acţiona singur asupra simţurilor noastre şi a le impresiona într-un fel cu totul disproporţionat faţă de intensitatea redusă a fiecărui element activ."

În lucrarea intitulată *Les Rythmes comme introduction physique a l'Esthetique* (ed. Boivin), Dl. Pius Servien arată că, pe lângă transpunerea analogică în durată a noţiunilor de proporţie şi de simetrie, ce ţin (precum acordurile muzicale şi timbrul) de domeniul continuului, urzeala analizabilă a ritmului sonor este formată din periodicităţile numărabile (discontinue).

Găsesc în cotidianul Times (din 14 ianuarie1944) această excelentă definiţie condensată: „Ritmul este experienţa şuvoiului ordonat al unei mişcări".

Dl. Francis Warrain, scoţând în relief o analogie desăvârşită, a scris: „Ritmul este pentru timp ceea ce simetria este pentru spaţiu."

Este riguros adevărat, însă cu condiţia să nu iei ca sens al cuvântului „simetrie" accepţiunea modernă a termenului (repetare a unor elemente identice, de o parte şi de alta a unei axe sau plan de simetrie), ci sensul antic, păstrat în Evul Mediu şi la începutul Renaşterii: repetare a unor forme *asemănătoare*, într-o comodulaţie obţinută printr-un şir de proporţii. Proporţia şi simetria în spaţiu corespund, astfel, perfect ritmului în durată. Vom regăsi simetria şi definiţia ei clasică dată de Vitruviu într-un alt capitol, ca şi legăturile dintre ritm şi proporţie.

Să ne întoarcem la noţiunea grecească de număr, noţiune precum

am văzut tripartită, ca mod de formare pentru numerele pe care le-am numit ştiinţifice.

Disciplina pitagoreică a „Numerelor Figurate" (figurate prin îmbinări de puncte, ce corespund şi unor creşteri omotetice, „gnomonice", de figuri geometrice), disciplină care este, între altele, o excelentă introducere în calculul diferenţelor întregi, aplicat în algoritmii unor maşini de calculat, şi totodată o introducere, după cum vom vedea mai departe, în geometria poliedrelor şi hiperpoliedrelor regulate, i-a făcut pe greci să observe că în ciuda unui mod de formare uniform, fiecare număr, are caracteristici care în general îl deosebesc de toate celelalte. Este remarcabil, desigur, şi se observă deja în primele numere întregi, cum ar fi 2, 3, 4, 5, faptul că adunarea numărului 1, a unităţii, schimbă de fiecare dată în întregime proprietăţile unui număr întreg, scoţând în evidenţă un nou individ în „societatea Numerelor"; acest lucru se aplică atât „Numerelor Pure" cât şi „Numerelor Ştiinţifice".

Nu are rost să mai vorbim despre caracteristicile Monadei, ale numărului Unu, care este nu numai elementul aditiv ce îngăduie să se producă, prin iteraţie, întregul şir al numerelor întregi, ci şi, în logica pură şi în logistica modernă, rădăcina sau (după preferinţe) reflectarea principiului Identităţii; apare, de asemenea, cu totul firesc în principiul de inducţie totală. Nu ne vom ocupa nici de Monadologia lui Leibniz şi nici de toate construcţiile metafizice construite pe Unitate.

Diada, sau Numărul Doi, primul număr par şi feminin[4], apare, sub aspectul potenţialităţilor sale, în calculul combinărilor în aritmetică, dar şi în logistică şi în logica pură şi chiar în metafizică, drept rădăcină a ideii de Dualitate[5], a principiului noncontradicţiei, a opoziţiei între eu şi non-eu (Universul exterior).

Triada, primul număr impar şi masculin (Unitatea este mai degrabă un principiu decât un număr), îşi desfăşoară toată importanţa, toată puterea sa genetică în teoria Numerelor Figurate; vom vedea mai departe că numerele triunghiulare, sau mai degrabă imaginile lor geometrice sub formă de îmbinări de trei puncte, furnizează principiul geometric de formare şi de creştere a tuturor figurilor regulate plane şi solide cu 3 sau cu un număr oarecare de dimensiuni. Ca numere propriu-zise, aceste numere triunghiulare domină şi teoria combinărilor şi permutărilor.

Tetrada, sau numărul Patru, participă atât la caracterul Diadei, al cărei pătrat este (fiind ultrapar, ultrafisionabil), cât şi la caracterul sacru al Tetraktys-ului, al patrulea număr triunghiular, care este însă şi simbolul figurat al foarte importantei Decade (numărul zece).

Pentru membrii Confreriei Pitagoreice, diagrama punctuală a Tetraktys-ului a fost un simbol ezoteric la fel de important ca

pentagrama care era, după cum vom vedea, parola lor secretă. Evocând Tetraktys-ul, membrii sectei depuneau jurământul solemn de a nu-şi divulga niciodată secretele, între altele secretele matematice. Iamblichos ne-a păstrat formula jurământului: „Nu, jur pe cel care a transmis sufletului nostru Tetraktys-ul, în care se găsesc izvorul şi rădăcina veşnicei naturi".

Iată textul rugăciunii pitagoreice către Decadă:

„Binecuvântează-ne, număr divin, tu care i-ai zămislit pe zei şi pe oameni! O sfânt, sfânt Tetraktys, tu care cuprinzi rădăcina şi izvorul şuvoiului veşnic al creaţiei! Căci numărul divin începe cu unitatea pură şi profundă şi atinge mai apoi numărul sacru patru; apoi el o zămisleşte pe mama a toate câte sunt, care leagă totul, cel dintâi născut, cel care nu greşeşte niciodată, care nu pregetă niciodată, Zecele Sacru, care ţine cheia tuturor lucrurilor."

Tetraktys-ul era surprins nu numai în natura Decadei şi în cea a numerelor triunghiulare, ci şi în armonia muzicală care, vom vedea, ocupa în ideologia pitagoreică un rol de prim ordin atât ca simbol al armoniei din Cosmos, cât şi ca tehnică sugestivă folosită pentru a crea atmosfera prielnică ritualului sectei (în paralel cu folosirea unei miresme - tămâie specială[6] şi a unei băuturi a cărei formule era ţinută şi ea secretă). Legătura dintre Tetraktys şi gama diatonică pitagoreică provenea din faptul că o liră tetracordă, având corzile de lungimi proporţionale cu 1, 2, 3 şi 4, producea atât octava (în raport de 4/2 sau de 2/1), cât şi intervalele de cvintă (3/2) şi de cvartă (4/3). Tetraktys-ul era astfel identificat în „catehismul" pitagoricienilor cu Armonia Sferelor sau a sirenelor planetare; „Tetraktys, armonie pură, cea a Sirenelor" (*Iamblichos*, citat din Aristotel).

În stereochimie, valenţa cvadruplă a carbonului (carbon tetraedric) joacă un rol important în numeroşii compuşi organici sau anorganici.

Patru, număr feminin prin excelenţă, era pentru chinezi semnul Pământului, uneori al împărătesei, al căror simbol comun era un cub alungit străbătut de o gaură cilindrică. Tot cubul era şi pentru Platon simbolul Pământului.

Pentada, sau Numărul Cinci, era pentru pitagoreici aproape la fel de importantă ca Decada, fiindu-i acesteia jumătate şi imaginea reflectată condensată. Compusă din primul număr impar, masculin, asimetric, propriu-zis (după Monadă), adică trei, şi din primul număr par feminin, doi, ea reprezenta pentru greci Numărul Iubirii (Pente GamovvV), Numărul Afroditei ca zeiţă a împreunării roditoare, a Iubirii zămislitoare, arhetip abstract al procreării. Pentada este totodată numărul armoniei în starea de sănătate ("Uneia) şi al frumuseţii încarnate în corpul omenesc, proiecţie în plan material a

sufletului cosmic, a Decadei - macrocosmos, reflectând asemenea ei ritmul cuprinzător al Vieţii Universale. Acest sincronism între ritmurile sufletului individual „bine acordat" şi cel al „Sufletului Lumii" este limpede specificat în *Timaios*:

„Apoi, în acest corp în care năvăleşte şi din care se scurge un şuvoi (Viaţa) necurmat, ei (zeii) introduc mişcările periodice ale Sufletului nemuritor".(Timaios, 43a)

Emblema geometrică a Pentadei este Pentagrama, stea regulată în cinci colţuri care, o ştim de la Lucian, era parola secretă şi simbolul geometric al confreriei pitagoreice[7].

În morfologia biologică rolul Simetriei pentagonale şi al Secţiunii de Aur care îi este asociată[8] a fost ghicit intuitiv de către pitagoreici şi de Platon; Luca Pacioli (Divina Proportione, 1509) a interpretat subtil aluziile criptice ale lui Platon în legătură cu dodecaedrul (cu 12 feţe pentagonale), dezvoltare în cea de-a treia dimensiune a pentagonului regulat, dar rolul acesta a fost lămurit numai destul de recent.

Nu vom insista asupra numărului Şase sau Hexada decât pentru a menţiona rolul echipartiţiilor şi al simetriilor hexagonale în cristalografie. Şase reprezintă îndeajuns de logic stabilitatea şi echilibrul; Vitruviu îl semnalează ca număr perfect (este şi în aritmetică perfect întrucât este suma factorilor săi 6 = 1 x 2 x 3 = 1 + 2 + 3), el reprezentând pentru magicieni şi alchimişti, moştenitori ai tradiţiilor pitagoreice ale Gnozei şi Cabalei, natura neorganizată, *natura naturata*.

Şapte este important mai ales ca număr sacru în mistica ebraică şi caldeeană; pentru pitagorici el era emblema Virginităţii (o epta parqenovvV).

Să subliniem că nu se poate împărţi un cerc în 7 segmente egale printr-o construcţie euclidiană, în timp ce acest lucru este posibil pentru 3 şi 5. Şapte este aşadar dacă vreţi „arhiprimul“, iar virginitatea lui este de netăgăduit.

În sfârşit, ca să ne limităm la cele mai importante dintre primele numere întregi:

Decada - nu are rost să insistăm asupra rolului Numărului Zece în sistemul de numeraţie adoptat de cele mai multe naţiuni civilizate, nu acest aspect îi interesa pe pitagoreici. Atribuindu-i Decadei demnitatea de „Număr al Lumii“, ea avea pentru ei tripla calitate:

1° de a fi dublul Pentadei (în geometrie ea repetă simetria pentagonală şi reflectă totodată proporţia din Secţiunea de Aur: raportul dintre raza cercului circumscris decagonului regulat şi latura acestuia este $R/d_r = \emptyset = 1{,}618$, şi se întâmplă acelaşi lucru cu raportul dintre latura decagonului sub formă de stea şi raza

cercului circumscris, d_c / R;

2° de a prezenta suma punctelor conţinute în Tetraktys-ul[9] deja prezentat;

3° de a fi, în sfârşit, asemenea Decadei, simbolul Cosmosului; să-l citäm din nou pe Nicomachos din Gerasa. După ce a introdus, aşa cum am văzut mai înainte, măreţia Numărului Pur sau Divin, Număr paradigmă preexistând în gândirea Dumnezeului creator, el continuă:

„Dar, întrucât totul era o multitudine nelimitată, trebuia o Ordine..., or, în Decadă preexista un echilibru natural între ansamblu şi elementele sale... De aceea Dumnezeu, orânduind cu măiestrie în numele Raţiunii sale, a folosit Decada ca pe un canon pentru tot... şi de aceea lucrurile dintre cer şi pământ au pentru ansambluri şi părţi raporturile lor de concordanţă bazate pe ea şi ordonate după ea.“ Să amintim că „raportul de concordanţă”, proporţia dominantă în decagon, imagine geometrică a decadei, este proporţia Secţiunii de Aur, dominantă şi în pentagramă, simbolul secret al pitagorismului. Vitruviu foloseşte aceleaşi expresii când defineşte euritmia unei compoziţii arhitecturale şi subliniază, de asemenea, importanţa numărului zece în jocul proporţiilor unui Templu; căci arhitectura grecească, inspiratoare a lui Vitruviu, era ezoterică, iar ezoterismul ei era împrumutat tocmai de la mistica pitagoreică a numerelor, (cf. cărţii mele *Numărul de Aur*).

În chip de concluzie, Nicomachos numeşte Decada Totul (Panv) „căci în mâna Orânduitorului ea a servit drept măsură a totului asemeni unui echer şi unei sfori”.

Pentru a merge ceva mai departe în tradiţia greacă, ştim că Speusippos, nepot al lui Platon, a scris în tratatul său despre Numerele Pitagoreice:

dekadavV paradeinma tw tovvu patovV poihth qew

„Decada a fost paradigma (modelul) folosită de Dumnezeul Creator pentru tot”, (se vede asocierea etimologică între poezie şi creaţie).

Pentru a termina această sumară trecere în revistă a „Numerelor Divine”, voi cita un pasaj din textul imnului orfic închinat Numărului, şi care foloseşte termeni atât de arzători cât îngăduie „Mistica de gheaţă a Numărului Pur”.

„Din peştera neîntinată a Monadei până la numărul sacru al Tetradei din care cu adevărat a ieşit maica roditoare a tot, cea care, mai însemnată decât tot, cuprinde tot, neclintită, veşnică, cea căreia zeii nemuritori şi oamenii ieşiţi din ţărână îi zic Decada Pură“.

CAPITOLUL III

ARMONIA NUMERELOR ŞI A COSMOSULUI ÎN DOCTRINA LUI PYTHAGORAS - CORELAŢIA UNIVERS-TEMPLU-OM - MAREA PIRAMIDĂ - TRIUNGHIUL LUI PYTHAGORAS ŞI TRIUNGHIURILE DIOFANTINE -TRIUNGHIUL LUI PYTHAGORAS TRANSMIS DE CALDEEA ŞI EGIPT EUROPEI NEOLITICE

Părăsind aerul rarefiat al Numerelor Divine pentru domeniul mai practic al numerelor ştiinţifice şi al aplicării lor în artele frumoase, în mod deosebit în arhitectură, o să dau mai întâi, amintindu-mi fraza lui Confucius despre însemnătatea denumirilor precise[10], o listă a principalelor cuvinte greceşti care au legătură cu numărul; aceasta va reaminti, celor care au uitat, cât de subtilă şi precisă era gândirea grecească în materie de logică şi de matematică.

τὸ ἕν	Unul
πηλίκον	Mărime, cantitate
μέγεθος	Mărime continuă
πλῆθος	Mulțime, multitudine de elemente distincte
Σύμμετρα μεγέθη	mărimi comensurabile
Ἀσύμμετρα -	mărimi incomensurabile
τῶν μετρητῶν	niște comensurabile
τῶν ἀμετρῶν	niște incomensurabile
ποσόν	cuantum
ποσότης ἀριθμός	număr, mulțime numărabilă finită sau combinare de unități

χύμα	șuvoi (de monade), care curge
τὸ ἄπειρον	nedefinitul
τὸ πέρας	finitul, limita
μέρος	parte

λόγος	raţiune, cuvânt, raport, raţionament, relaţie, judecată
ποῖα σχήσις	raport geometric
ποσὴ σχήσις	relaţie cantitativă (raport aritmetic)
ἀναλογία	proporţie geometrică continuă
τὸ ἀναλογον	proporţie geometrică disjunctă
χάρις	graţia
ἀλήθεια	adevărul
τὸ ὄντως ὄν	ceea ce există cu adevărat
τέλος	ţel
φύσις	natura
δύναμις	forţă, putere
ἐνέργεια, ἐντελέχεια	acţiune
πρώτη ὕλη	materie primă
εἶδος	formă
αἰτία	cauză
ἐμπειρία	experienţă
ἡδονή	plăcere
τὰ φαινόμενα	fenomenele
Οὐσια, sau τὰ ὄντα	realităţile
τὰ μὴ ὄντα	lucrurile care nu există în mod real
Νοῦς	Spiritul-Inteligenţă
Πνεῦμα	Sufletul Lumii, Suflu
Λόγος	Raţiune
'Αρμόττειν	A uni, a pune în armonie
εἶδος	Formă
ἰδέα	Idee

Trei nuanţe ale cuvântului a face sau ale ideii de a crea:

πράττειν	A potrivi cu dibăcie
ποιεῖν	A crea
τέχνη	A orândui cu măiestrie, tehnică a artistului sau a meşteşugarului

Noţiunea de Număr care guvernează Universul, introdusă de Pythagoras, a fost reluată de Platon care a fost, aşa cum vom vedea în

capitolul următor, împreună cu Archytas din Tarent, iniţiatorul lui, cel mai important dintre discipolii şi urmaşii Maestrului din Samos. Am văzut că la Numerele arhetipuri Platon a mai adăugat Ideile-Forme, numerele fiind, de altfel, reflectate în formele Geometriei. Numărul şi Frumuseţea erau arhetipurile stăpânitoare (Frumuseţea absolută din *Banchetul*), dar Frumuseţea însăşi şi Armonia Cosmosului erau supuse Numărului, care domina atât lumea anorganică, cât şi pe cea organică. Al treilea arhetip iubit de Platon, derivat el însuşi din Număr, era proporţia sau, în sensul cel mai general, Analogia; termenul grecesc pentru proporţie este, de astfel, avnalogia.

Însuşi cuvântul Cosmos, născocit de Pythagoras, care cuprindea în sine ideea unui Univers bine orânduit (prin Numere) şi chiar armonios orânduit de către Creator (o tecxnithvV qeovVtic), Dumnezeul cel ce potriveşte cu măiestrie şi conceptul de armonie împreună cu cel asociat, de simetrie, în sensul antic al cuvântului[11], au dominat nu numai întreaga cosmologie şi estetică platoniciene, ci şi arhitectura grecească, ale cărei idei călăuzitoare sunt criptic sugerate de Vitruviu (Vitruviu, ca toţi arhitecţii Antichităţii, prestase jurământ să nu dezvăluie neiniţiaţilor tainele artei sale; am văzut că, pesemne, ca toţi confraţii greci şi romani, asimilase îndeajuns din mistica pitagoreică a numerelor pentru a preamări virtuţile numărului Zece, ale Decadei Pure[12]. El a mai stabilit un paralelism aproape riguros între proporţiile templului ideal şi cele ale corpului omenesc).

În această estetică pitagoreico-platonică, armonia va fi ori o consecinţă a euritmiei perfecte obţinută din prima clipă, ori o consecinţă a antagonismului principiilor opuse, rezolvate aşa cum în muzică modulaţia rezolvă disonanţele, la fel cum în teoria proporţiilor Platon se foloseşte de medietăţi (medii proporţionale) pentru a acorda cei doi termeni extremi ai unei proporţii. Acel PoldemoV Pathr pantwn[13], al lui Heraclit devine, la rândul său, factor de armonie.

În psihologie şi chiar în fiziologie, Platon face să intervină armonia care poate rezolva contradicţiile ce se ivesc uneori în suflet una împotriva celeilalte.

Această noţiune de armonie cosmică, reflectată în acordurile dintre Univers, templu[14] şi om, a fost împrumutată, se pare, de Pythagoras de la egipteni în timpul şederii sale printre preoţii din Teba sau din Sais.

Lucrările lui M. Varille şi ale lui Lubicz despre templele egiptene şi simbolistica lor au scos în evidenţă corelaţia strânsă dintre proporţiile acestora şi cele ale corpului omenesc, totul fiind când subliniat, când învăluit de un simbolism subtil.

Cel mai interesant şi mai subtil monument egiptean, ca punere în proporţie, este Marea Piramidă sau Piramida lui Keops. Kleppish şi Jarolimek au remarcat, cei dintâi, că semi triunghiul meridian al

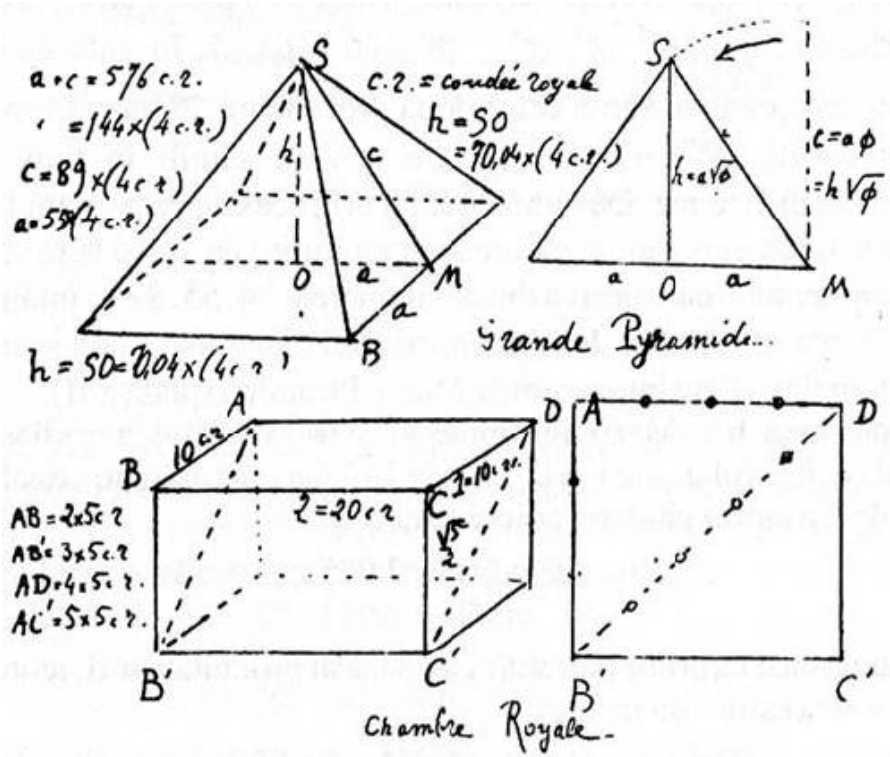
acestei piramide (piramidă regulată cu baza un pătrat şi cu patru feţe triunghiulare), triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză şi latura mică, jumătate din latura pătratului de bază, sunt, la prima vedere, în raportul riguros al secţiunii de aur, 1,618, pare a rezulta, dacă notăm cu r cotul regal egiptean (0,524 m), dintr-o construcţie foarte ingenioasă care pleacă de la a + c (jumătatea laturii pătratului de bază + ipotenuza semitriunghiului meridian) = 144 x 4 r.

Atunci c = 89 x 4r şi a = 55 x 4r. Or, 55, 89 şi 144 sunt 3 termeni consecutivi din şirul lui Fibonacci, şir definit prin recurenţă cu doi termeni în care raportul dintre doi termeni consecutivi tinde foarte repede către raportul secţiunii de aur $(1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}618$ (vezi planşa I).

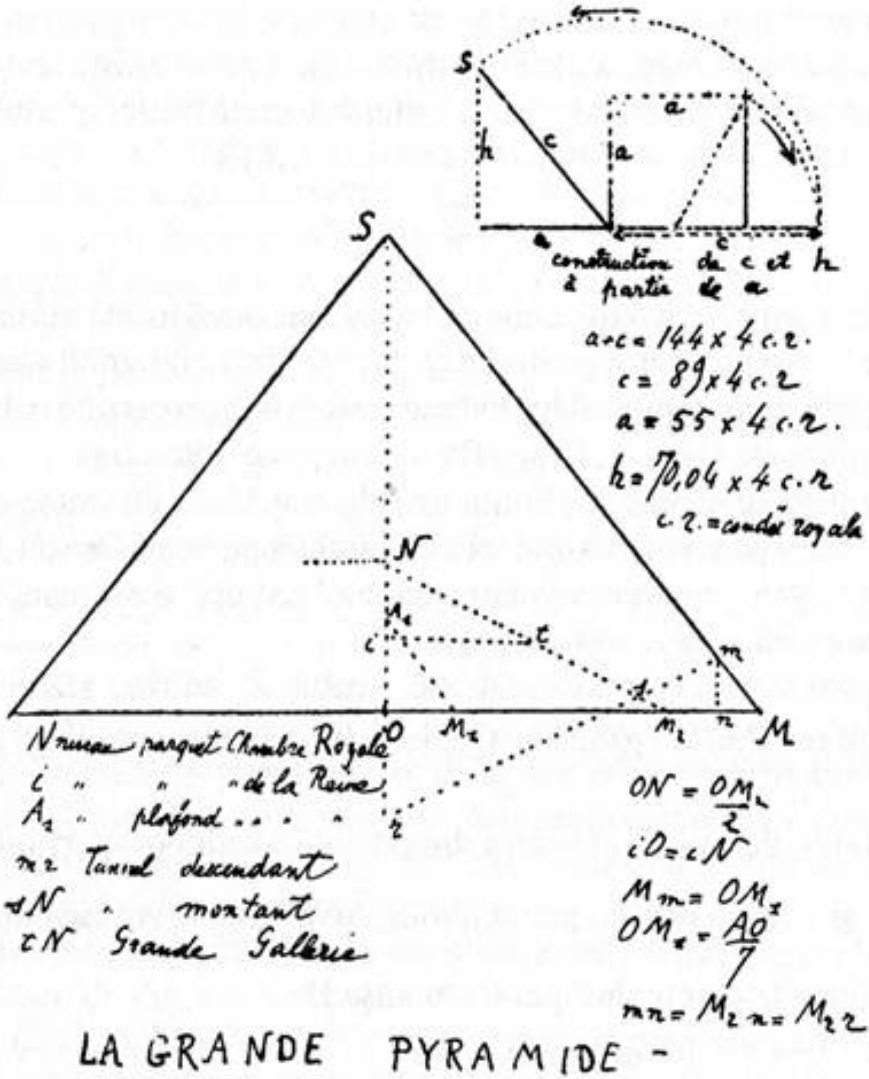
Şirul lui Fibonacci este 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 89, 144... fiecare termen fiind suma celor două precedente şi raporturile termenilor consecutivi fiind:

$$3/2 = 1{,}5\ ;\ 5/3 = 1{,}66\ ;\ 8/5 = 1{,}6\ ;\ 13/8 = 1{,}625$$
$$21/13 = 1{,}615\ ;\ 34/21 = 1{,}619$$
$$55/34 = 1{,}617\ ;\ 89/55 = 1{,}618$$

Vedem că valorile raporturilor consecutive oscilează in jurul valorii ideale $\emptyset = 1{,}618$ şi o ating asimptotic foarte repede.


S
c.2. = coudée royale
h = 50
= 70,04 x (4 c.2.)
c = 89 x (4 c.2.)
h
c
O
a
M
B
S
h = a√6
c = aφ
= h√φ
a
O
a
M
Grande Pyramide...
A
D
B
10 c.2.
C
2 = 20 c.2.
AB = 2x5 c.2
AB' = 3x5 c.2
AD = 4x5 c.2.
AC' = 5x5 c.2.
B'
C
A
D
B'
C'
Chambre Royale

PLANȘA I



LA GRANDE PYRAMIDE -

PLANȘA II

Înălţimea h a Marii Piramide şi a triunghiului meridian cu laturile c, h, a (planşele I şi II) este de 146,6 m, aproximativ egală cu 70 x 4r din cauza ciudatei coincidenţe.

$$55^2 + 70^2 = 7.925$$

$$\text{şi } 89^2 = 7.921$$

Lungimea laturilor pătratului de bază al piramidei ar fi, teoretic, conform acestui sistem:

$2a = 2 \times 55 \times 4 \times 0{,}524 = 230{,}560$ m

Or, ultimile măsurători efectuate la faţa locului dau pentru media celor patru laturi ale bazei (cu o diferenţă de 20 de centimetri între cea mai mare şi cea mai mică) 230,634m, cu o diferenţă de 7 centimetri, inferioară distanţei dintre lungimile laturilor.
Avem atunci:

$$a = 55 \times 4r = 115{,}28m$$
$$c = 89 \times 4r = 186{,}53m$$
$$h = 70 \times 4r = 146{,}72\ m$$

Aceasta corespunde cu măsurătorile făcute la Gizeh, iar aproximaţia astfel obţinută de arhitectul Marii Piramide, folosind numerele fibonaciene în locul Secţiunii de Aur riguroase (egiptenii nu cunoşteau numerele iraţionale ca atare), este mai precisă decât fluctuaţiile care rezultă din condiţiile materiale de măsurare pe sol.

Raporturile din triunghi sunt astfel măsurate încât raportul c/a, al ipotenuzei faţă de latura mică, să fie $\emptyset = 1{,}618$.

$$c/h = h/a = \sqrt{\emptyset} = 1{,}273...$$

Este singurul triunghi dreptunghic de aşa natură încât laturile lui să se afle într-o progresie geometrică, tot aşa cum triunghiul sacru sau triunghiul dreptunghic al lui Pythagoras, 3, 4, 5,în care $5^2 = 4^2 + 3^2$, este unicul ale cărui laturi se află în progresie aritmetică.

Proporţiile semitriunghiului meridian al Marii Piramide au fost verificate şi printr-o măsurătoare unghiulară pe teren care dă 51° 50' pentru unghiul opus laturii mari a unghiului drept; acest rezultat este identic cu unghiul teoretic riguros.

Aproximaţiile fibonaciene ale şirului $\emptyset$ se mai găsesc şi în templul din Philae (până la $1/\emptyset^6$); în volumul „Camerei Regelui",din Marea Piramidă, ale cărei dimensiuni ideale, proporţionale cu 2, $\sqrt{5}/2$ şi 1 (baza este un pătrat dublu, cu diagonala cea mai mare $5/2$) sunt ilustrate practic în figura 2, planşa I.

Lăţimea AB = 10r
Lungimea BC = 20r
AB' (diagonala secţiunii) = 3 x 5r
Lungimea BC = 2AB = 4 x 5r
Marea diagonală AC' = 5 x 5r

r fiind şi în acest caz chiar cotul regal egiptean. Vom vedea puţin mai departe că triunghiul sacru 3, 4, 5 şi cotul regal s-au răspândit până dincolo de hotarele egiptene.

Nu am să descriu aici toate proprietăţile matematice ale Marii Piramide şi ale Camerei Regale; ele se înlănţuiesc în chip subtil cu geometria icosaedrului înscris în sfera circumscrisă pătratului de bază al piramidei, având drept centru vârful piramidei. Voi mai adăuga doar că tunelul de coborâre către marea galerie este îndreptat, ca o lunetă meridiană permanentă, spre nordul sideral, făcând un unghi de 26° 30' cu orizontul.

Aşa cum am mai scris, se pare că arhitectul Marii Piramide nu era conştient de toate proprietăţile geometrice pe care le descoperim noi în ea atât de târziu; şi totuşi aceste însuşiri nu sunt întâmplătoare, ci decurg oarecum organic din ideea călăuzitoare cuprinsă în mod conştient în triunghiul meridian. Căci o concepţie geometrică sintetică şi limpede furnizează întotdeauna un plan regularizator; acesta are originalitatea de a înşira în rigiditatea cristalină şi abstractă a Piramidei o pulsaţie „dinamică", chiar aceea care poate fi socotită drept simbol matematic al creşterii vii.

Aceste aproximaţii fibonaciene ale triunghiului dreptunghic cu laturile în proporţie geometrică de raţia $\sqrt{\emptyset}$ şi ale triunghiului lui Pythagoras 3-4-5 se mai găsesc într-o serie de edificii egiptene construite mai târziu decât Marea Piramidă. într-adevăr, egiptenii cunoşteau foarte bine acest triunghi dreptunghic $5^2 = 4^2 + 3^2$ şi se foloseau de el pentru a trasa chiar pe sol unghiul drept necesar orientării templelor[15] şi obţinerii subdiviziunilor schiţelor regularizatoare. Pythagoras a fost iniţiat în matematică de către preoţii din Heliopolis şi Sais şi desigur tot de la ei a aflat proprietăţile triunghiului căruia i-a dat numele său (faimoasa hecatombă corespunzând probabil generalizării proprietăţii pătratului ipotenuzei pentru toate triunghiurile dreptunghice).

Din cercetările arhitectului cehoslovac Ian Mannesbarth (*Bulletin du Musee de Prague* publicat în 1946) reiese:

1° că triunghiul 3-4-5 ar avea un trecut şi mai îndepărtat şi ar fi fost împrumutat de egipteni din Caldeea;

2° că din Caldeea şi din Egipt au fost răspândite planuri regularizatoare pe acest triunghi nu numai în Grecia miceniană, ci şi la populaţiile neolitice din mileniul al III-lea î.Hr. (epoca ceramicii cu motive în benzi) şi mai târziu în prima perioadă (Hallstadt) a epocii fierului. Curios este faptul că în toate aceste planuri neolitice unitatea de care se foloseau meşterii zidari primitivi este acelaşi cot regal egiptean înmulţit cu 8, 9, 10, 12, 15 sau 25. Citez în continuare rezultatul măsurătorilor efectuate la faţa locului sau pe planuri de J. Mannesbarth:

1° Mormântul reginei Şubat din Ur în Caldeea (începutul mileniului al III-lea î.Hr.); un triunghi isoscel cu laturile 18A, 15A,

15A (A fiind cotul caldeean), este înscris într-un dreptunghi cu proporţia $3/2$; acest triunghi este alcătuit din două triunghiuri ale lui Pythagoras cu dimensiunile 15A, 12A, 9A, proporţionale cu 5, 4, 3[16].

2° În Egipt, găsim ceva mai târziu mastabaua principală din Gaza stabilită pe trei dreptunghiuri formate fiecare din două triunghiuri dreptunghice 10a, 8a, 6a (a fiind cotul regal egiptean folosit în planul Marii Piramide) adică, din nou proporţiile 5-4-3.

3° În epoca micenianâ, găsim în megaronul regal al cetăţii din Tirint un dreptunghi format din două triunghiuri dreptunghice 15a, 12a, 9a (a este tot cotul regal egiptean) cu aceleaşi proporţii 5-4-3.

4° Mai neaşteptată este constatarea faptului că epoca bronzului şi începutul epocii fierului în Europa Centrală dovedesc aceeaşi folosire a acestui triunghi „sacru“. De pildă, la Koln-Lindenthal (triunghiurile 15a, 12a, 9a), la Zamky în apropiere de Praga (aici triunghiurile dreptunghice au dimensiunile subtile 12,5 x a, 10 a, 7,5 x a; avem $12{,}5^2 = (7{,}5)^2 + 10^2$ sau 156,25 = 56,25 + 100; trebuie să împărţim la 2,5 dimensiunile pentru a obţine 5-4-3). Să mai citäm fundaţiile descoperite prin săpăturile din apropiere de Prerau în Moravia (triunghiuri 15a, 12a, 9a şi 10a, 8a, 6a) etc., toate acestea datând din epoca bronzului (mileniul al II-lea î.Hr.), în sfârşit ansamblul de case din epoca fierului (începutul mileniului I î.Hr.) descoperite la Goldberg în Austria (triunghiul lui Pythagoras 30a, 24a, 18a, apoi 25a, 20a, 15a şi 20a, 16a, 12a).

Faptul cel mai demn de luat în seamă la toate aceste planuri nu este numai transmiterea în lungul şi în latul Europei din ultimul mileniu neolitic a acestui tip de triunghi împrumutat de Egipt din Caldeea, ci îndeosebi folosirea ca unitate, în toate aceste planuri, a cotului regal egiptean; se pare că de sub tradiţiile în aparenţă fanteziste ale francmasonilor operativi şi ale companionilor din Evul Mediu s-ar ivi un temei de adevăr cu privire la peregrinările înaintaşilor lor.

Întrucât ne-am oprit la triunghiul lui Pythagoras 3-4-5, putem sublinia faptul că el face parte din acea interesantă categorie numită „triunghiuri Diofantine“, de la numele lui Diofant din Alexandria. El a dezvăluit profanilor disciplina pitagoreică a Numerelor Figurate şi a studiat în mod deosebit grupurile de numere întregi a, b, c, astfel încât $c^2 = a^2 + b^2$, şi triunghiurile dreptunghice corespunzătoare.

Există mai multe feluri de a stabili seriile de triunghiuri diofantine. De pildă, orice număr întreg X care se poate aşeza sub forma unui produs de două numere întregi X = p x q, reprezintă una din laturile unghiului drept dintr-un triunghi dreptunghic a cărui ipotenuză este

$z = (p^2 + q^2)/2$ iar cealaltă latură $y = (p^2 - q^2)/2$. Într-adevăr,

$$p^2 q^2 + ((p^2 - q^2)/2)^2 = ((p^2 + q^2)/2)^2$$

Acest procedeu oferă pentru o valoare dată a lui X tot atâtea perechi y, z câte cupluri de factori p, q diferite, cu (p^2 - q^2) număr par, putem găsi[17].

O altă metodă constă în a lua un număr întreg impar oarecare n; atunci:

n, $(n^2 - 1)/2$, $(n^2 + 1)/2$

sunt, de asemenea, numere diofantine pentru că avem:

$$((p^2 + q^2)/2)^2 = ((p^2 - q^2)/2)^2 + n^2$$

Luând astfel numerele impare succesive, obţinem coloanele:

$1^2 = 0^2 + l^2$
$5^2 = 4^2$ 4- 3^2
$13^2 = 12^2 + 5^2$
$25^2 = 24^2 + 7^2$
$4l^2 = 40^2 + 9^2$
$6l^2 = 60^2 + II^2$
$85^2 = 84^2 + l3^2$
.....

Coloana laturilor mari ale unghiului drept este un şir 0-4-12-24-40, astfel alcătuit încât diferenţele lui prime (diferenţele dintre două numere consecutive) formează o serie aritmetică 4,8,12,16,20,24 etc. ... cu raţia 4. Tot aşa stau lucrurile şi pentru coloana ipotenuzelor.

Pentru a încheia cu Egiptul, vedem că (fără a menţiona vreo disciplină subtilă în aritmetica fracţiilor care nu-şi are rostul aici), manipularea numerelor întregi şi folosirea în special a şirului lui Fibonaci şi a numerelor diofantine i-au permis să ajungă la unele aproximări de raporturi iraţionale îndeajuns de riguroase pentru a obţine cele mai delicate planuri regularizatoare.

Pythagoras a adus din Egipt un corpus geometric compact şi adaptat la toate nevoile inginerului, arhitectului şi sculptorului, de care s-a folosit şi el, la rândul său, pentru a pune bazele matematicii occidentale, aşa cum au fost codificate de către discipolii săi şi de Euclid.

CAPITOLUL IV

VIAŢA ŞI LEGENDA LUI PYTHAGORAS -PLATON ŞI NEOPITAGORISMUL

-CEA DE-A VII-A SCRISOARE A LUI PLATON

AntoV efa
(EI însuşi a spus-o)

Numele lui Pythagoras a apărut de mai multe ori în primele capitole ale acestei cărţi consacrate Numărului, fapt cu totul firesc, întrucât dintre toţi filosofii din Occident el a acordat cea mai mare însemnătate acestui concept. Cuvintele sale „Totul este rânduit după Număr", deja citate, au fost riguros verificate după 2500 de ani; după cum a scris Bertrand Russell, matematician şi filosof, şi unul dintre întemeietorii logisticii: „Cel mai uimitor lucru în ştiinţa modernă este întoarcerea sa la pitagorism."

Şi prin ştiinţă înţelegem aici matematica pură, fizică şi chimie. Vom vedea că „Numerele Divine" ale pitagoricianului Nicomachos din Gerasa se asemănau în mod ciudat cu numerele „clase de clase" ale lui Bertrand Russell şi Whitehead; dacă nu a fost înfăptuită în domeniul psihologic sau sociologic, armonia Cosmosului postulată de maestrul din Samos şi de discipolii săi pare că există cel puţin la scară siderală, sugerând, după cum arată Eddington, fie inteligenţa creatoare de armonie a unui Dumnezeu sau a unui demiurg, fie o armonie conformă de altfel cu teoria grupurilor, care s-ar găsi ca un dat a priori în intelectul uman.

Legenda lui Pythagoras a fost ridicată în slăvi şi înflorită cu atâtea adaosuri, numele său asociat cu atâtea iniţiative şi creaţii concrete, cu atâtea credinţe mistice şi intervenţii supranaturale, încât este cu totul firesc să ne întrebăm dacă în spatele acestei legende se află un adevăr istoric, dacă acest personaj, taumaturg, matematician şi reformator politic, a existat cu adevărat. Răspunsul, din fericire pentru amatorii de figuri de eroi, este afirmativ; viaţa lui Pythagoras din istorie poate fi desprinsă de legenda cristalizată în jurul numelui său, şi se iveşte din ea o personalitate tot atât de puternică şi de însemnată în evoluţia umanităţii, îndeosebi a umanităţii occidentale, cum au fost iluştri săi contemporani Buddha, Confucius, Lao-zi şi Zoroastru. în dezvoltarea etică şi culturală a vechii Asii ei înşişi plutind între istorie şi legendă.

Voi înfăţişa pe scurt, în continuare, ceea ce ştim despre viaţa lui Pythagoras; sunt ajutat în acest demers de lucrările recente ale lui

Mario Meunier, Carcopino, F. Cumont, G. Meautis, A. Delatte, care au confirmat autenticitatea multor amănunte ajunse până la noi prin tradiţie.

Pythagoras s-a născut la Samos între 592-572 î.Hr. (este în general acceptat anul 580), iar într-o tradiţie autentică referitoare la anii de tinereţe îl găsim adolescent cu plete lungi la jocurile celei de-a 48-a Olimpiade, câştigând la pugilat, împotriva „greilor“ adulţi, nepreţuita ramură de măslin. Pleacă apoi într-o lungă călătorie pentru a se iniţia pe rând în ştiinţele şi filosofiile din cele mai cultivate centre ale vremii; şederea în Egipt este confirmată de toate izvoarele şi de anumite particularităţi ale învăţăturii lui. Aici a fost fără îndoială iniţiat în misterele (la Memfis, Sais, Heliopolis) şi în geometria egipteană. Şederea în Caldeea (se pare că Pythagoras a fost luat prizonier în timpul cuceririi Egiptului de către Cambise şi dus la Babilon unde ar fi primit învăţătura Magilor) este posibilă dar nedovedită, la fel retragerea în Fenicia (muntele Cârmei). Şederea în Tracia, printre adepţii riturilor orfice, este foarte probabilă, întrucât ritualul misterelor orfice şi cel al sectei pitagoreice, ca şi simbolismul lor, au multe elemente analoage sau chiar identice. Dimpotrivă, şederea în India pare să aparţină întru totul legendei, iar afinităţile dintre dogmele vedice şi anumite credinţe pitagoreice se explică prin prezenţa în Egipt (menţionată deja de Herodot) a înţelepţilor hinduşi („gimnosofişti“, strămoşii yoghinilor de astăzi).

Sigur este faptul că din aceste călătorii s-a întors deja bărbat, în puterea vârstei (la 56 de ani, precizează Iamblichos, autor al celei mai complete Vieţi a lui Pythagoras, redactată în secolul al IV-lea A.D.), la Samos unde succesul lecţiilor sale i-a atras nu numai o mulţime tot mai mare de adepţi, ci şi invidia şi duşmănia tiranului Polycrates, care l-a silit să se exileze, de această dată pentru totdeauna; drept urmare ajunge la Crotona şi se stabileşte în Magna Graecia. Şi aici strălucirea personalităţii şi învăţăturii sale: etica idealistă şi doctrina ştiinţifică riguroasă (în care sunt cuprinse studiile numerelor figurate, ale proporţiilor, al celor cinci corpuri regulate şi, mister păstrat în mare taină departe de profani, secretul numerelor iraţionale) i-a adus o sumedenie de discipoli. Doctrina religioasă, etica şi „Teoria Numerelor” erau, după cum subliniază Platon în Scrisoarea a Vil-a, legate prin „formule-cheie”, prin principii generale şi relaţii „invariante” care se aplicau acestor trei domenii. In ciuda aparentei asprimi a cuvintelor: „Totul este rânduit după Număr”, religia lui Pythagoras proclamă o etică întru totul idealistă (aceeaşi tendinţă marchează faptul că fizica matematică modernă are drept rezultat „mentalismul” idealist antimaterialist al lui Eddington, James, Jeans, Max Planck, Weyl) întemeiată îndeosebi pe caritate şi iubire, Iubirea Divină, ea însăşi consecinţă a iubirii şi prieteniei pentru făpturi aşa

cum este definită în Banchetul de Platon.

Din Haos, prin creaţie şi alegere ordonată de către „Dumnezeu rânduind cu măiestrie" (sau „Supremul făuritor"), se naşte ordinea (Cosmosul este Universul ordonat), ordinea devine Armonie, percepută ca Armonie consonantă de ritmurile sufletului bine acordat, în biografia lui Pythagoras, de Heraclid Ponticul (fragment citat de Clement din Alexandria, *Stromata*), se spune că:

„Pythagoras aşeza fericirea (literal: *eudaimonia* sufletului) în contemplarea ritmului Universului (literal: în desăvârşirea dirijată a numerelor thV jteleothtoV tw nariqmwnv)".

Am văzut mai înainte că sincronismul între ritmurile sufletului individual „bine acordat" şi cele ale Sufletului Universal este specificat de Platon (*Timaios*) cu aceste cuvinte:

„Apoi, în acest corp în care năvăleşte şi din care se scurge un şuvoi (viaţa) necurmat, ei (zeii) fac să intre mişcările periodice ale Sufletului Universal..."

Rolul regularizator, purificator, al muzicii este, de asemenea, subliniat de Platon:

„Căci armonia ale cărei unduiri sunt de acelaşi fel cu mişcările regulate ale sufletului nostru nu-i apare în nici un chip omului care are legături cu Muzele ca bună doar să-i procure o plăcere iraţională ... Dimpotrivă, Muzele ne-au dat-o să-i fie aliată sufletului nostru când începe să pună în ordine şi în acord mişcările sale periodice care s-au dereglat în noi..."

Aceeaşi ambiţie de a pune în acord ritmul individual cu cel al Universului, ambiţie pe care Platon a luat-o direct de la pitagorism, este exprimată în termeni aproape identici în ideologia şi practica sectei budiste contemplative Zen în care devine o mistică a Frumuseţii în natură şi în artă, estetism totodată auster şi rafinat care a înrâurit întreaga artă din marile epoci japoneze, ca şi ritualul „Ceremoniei ceaiului".

Estetica şi filosofia lui Platon erau, de altfel, dominate de supremaţia Numărului şi a slujnicei lui, Geometria; este cunoscută butada:

„*Până şi Zeul geometrizează*"

şi interdicţia, pentru „negeometri", de a trece pragul Academiei sale.

Vom vedea mai departe că nu este vorba aici de o întâlnire întâmplătoare de idei între Pythagoras şi Platon, ci de o influenţă preponderentă în filosofia cu nenumărate faţete a acestuia din urmă. Ba chiar se străduieşte, într-un divertisment matematic din *Timaios*, să stabilească un rebus a cărui cheie nu a fost descoperită decât la începutul secolului al XlX-lea, de a calcula ceea ce el numeşte „Numărul Sufletului Lumii", de fapt o gamă cu 35 de note, plecând de

la cele două progresii geometrice, 1,2,4,8 şi 1,3,9,27, ale căror intervale le completează cu medii aritmetice şi armonice pentru a obţine şirul

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{27}{6}, \frac{243}{128}, 2, \ldots 27.$$

(Cer iertare de a fi anticipat aici teoria proporţiilor şi concepţia platoniciană a „medietăţilor").

În afara acestei doctrine a Armoniei, doctrina religioasă a lui Pythagoras (căci Filosofia sa era o religie completă împreună cu etica, riturile, disciplina sa) admitea că sufletele sunt supuse unor reîncarnări succesive până la eliberarea acelora care s-au arătat demne de acest lucru în timpul palingenezei (metempsihoză, succesiune a ciclului vieţii); ele devin atunci „daimones", „genii" semidivine care nu se mai întorc în lumea noastră decât ca o apariţie luminoasă (Zoroastru, Buddha, Pythagoras), dar se regăsesc în grădinile stelare ale preafericiţilor, „dincolo de Calea Lactee". (Acest aspect al pitagorismului pare a sugera o legătură cu hinduismul.)

Calea Lactee este deseori întâlnită în miturile pitagoreice referitoare la viaţa de după moarte. Pe una dintre plăcuţele funerare din Ihurium, Carcopino nota inscripţia geamănă, „parolă şi răspuns"[4]:

„Iedule am căzut în lapte."
„Iedule ai căzut în lapte."

Şi, corespondenţă simbolică, pe una dintre stucaturile din Bazilica pitagoreică de la Porte Maggiore din Roma, o bacantă întinde un ied (sufletul) către sânul dezgolit al alteia, care e gata să-l alăpteze.

Această bazilică, descoperită în urma prăbuşirii, la 24 aprilie 1914, a unei porţiuni de balast de sub şinele căii ferate care duce de la Roma la Neapole, aproape de Porte Maggiore, a fost identificată de Cumont şi Carcopino drept o lojă sau „peşteră" pitagoreică; este singurul exemplu de templu pitagoreic care a ajuns până la noi şi ne-a dezvăluit în frumoasele sale stucaturi neatinse câteva lămuriri privind simbolurile sectei. Porphyrios şi Jamblichos ne relatează că la Samos Pythagoras îşi amenajase drept „casă pentru Filozofie" o peşteră, simbol al lumii aparenţelor ca şi a întemniţării corpului, originea şi a frumosului mit al peşterii lui Platon după Pophyrios (*De Antro Nympharum*).

O altă stucatură din această bazilică de la Porte Maggiore reprezintă o femeie tânără cu o liră în mână, care se aruncă în valuri de pe o stâncă, sub privirile lui Eros; o sirenă pare că o aşteaptă pentru a o primi şi a o duce spre o insulă unde tronează un zeu solar.

Cumont vede în asta o alegorie a sufletului omenesc care, îmboldit de Iubire şi ţinând în mână heptacordul vibrând de armonia lumii, nu se teme să înfrunte încercarea trecătoare a Morţii pentru a regăsi, dincolo de tiparele materiei nedesăvârşite, revelaţia divină (Apollon este din întâmplare Zeul sau mai degrabă arhetipul divin a lui Pythagoras).

Pliniu (într-un text găsit de Carcopino)spune lămurit că pitagoreicii îşi însuşiseră legenda aruncării lui Sapho în mare de pe stânca Leucadelor pentru a face din ea un simbol al „saltului" şi al eliberării sufletului în Moarte. După cum subliniază Carcopino, bazilica oferă şi dovada vitalităţii religiei pitagoreice la Roma, la începutul erei creştine.

Să ne întoarcem la biografia lui Pythagoras. Venirea lui la Crotona este plasată în anul 529 î.Hr. de către Aristoxenos din Tarent. Succesul învăţăturii sale filosofice şi matematice în Calabria şi mai apoi în Sicilia este atât de mare încât numărul adepţilor săi sporeşte neîncetat. Iacomachos şi Iamblichos amintesc un măreţ discurs al maestrului care a avut drept urmare întemeierea Societăţii sau „Fraternităţii" pitagoreice (acest discurs oferă pesemne substanţa pentru „Hieros Logos", turnată în versuri ionice de către discipolii apropiaţi şi de fiul lui Pythagoras); membri societăţii făgăduiau să-şi pună laolaltă bunurile şi, meditând la noua revelaţie (sau „filozofie", termen născocit de Pythagoras), să tindă către înfăptuirea, prin cunoaştere şi iubire, a armoniei interioare, în acord cu Marea Armonie. Ceea ce deosebeşte pitagorismul de celelalte etici întemeiate pe armonie este faptul că singura cale de a ajunge la cunoaşterea indispensabilă, sau „gnoză", este baza sa matematică, taine păstrate cu străşnicie la care numai iniţiaţii de gradul al doilea puteau năzui. Societatea pitagoreică devenise treptat o fraternitate secretă iniţiatică, modelul de mai târziu al mai tuturor societăţilor secrete. Un noviciat de trei ani (stagiu exoteric sau politic, sau acusmatic) preceda admiterea în primul grad (nomoteţi). Doar celor din al doilea grad (matematicienii) le era îngăduit să-l vadă pe Maestru (celor din primul grad le era îngăduit să-l audă).

Succesul molipsitor al doctrinei şi eticii pitagoreice a dus la transformarea rapidă a sectei din contemplativă în activă; savanţii şi idealiştii puri deveniţi oameni politici au luat treptat puterea şi au exercitat-o cu succes asupra celei mai întinse părţi din Magna Graecia sub forma unei federaţii de cetăţi numită „Liga crotoniată". Moartea Maestrului, întâmplată în jurul anului 500 î.Hr., a dus la slăbirea hegemoniei societăţii, iar disensiunile şi intrigile care au urmat au pregătit terenul pentru o revoluţie demagogică; cetăţenii din Federaţie se săturaseră să tot fie cârmuiţi armonios de savanţi, înţelepţi şi oameni ai dreptăţii şi tânjeau după un regim de politicieni mai pe

placul lor, chiar de-ar fi fost aceştia mediocri sau corupţi. Cetăţile Ligii au căzut pe rând în mâinile celor nemulţumiţi şi în cele din urmă conducătorii Confreriei au pierit într-un mare măcel (incendiul de la Metapont) în jurul anului 450 î.Hr. Doar Lysis şi Philolaos au izbutit să scape împreună cu câţiva novici, printre care pesemne Hippocrates din Chios care s-a stabilit la Atena, Hiparchos şi Hippasos, toţi trei rămaşi cunoscuţi pentru faptul că, divulgând mulţimii anumite secrete matematice tăinuite, au fost excomunicaţi de către celulele Confreriei reconstituite, la câtăva vreme după catastrofă, în Sicilia şi în Calabria. Membrii săi au renunţat la activitatea politică cu excepţia strălucită a lui Archytas din Tarent. Dar activităţile ştiinţifice şi etice, studiile matematice, întrajutorarea, mereu sub pecetea tainei, au fost menţinute.

Legea tăcerii şi a secretului constituiau, împreună cu puritatea inimii şi curăţenia corpului, esenţa regulii neopitagoreice, taină pecetluită de un jurământ. Pe vremea când se aflau la Crotona, activitatea politică a novicilor şi a nomoteţilor suspendase în mod firesc jurământul de tăcere, atunci când lucrau în afara Confreriei. Jurământul de păstrare a secretului se depunea pe simbolul figurat al Decadei, „sfântul" Tetraktys; Iamblichos ne-a păstrat formula citată mai înainte: „Nu, jur pe cel care a transmis sufletului nostru Tetraktys-ul în care se găsesc izvorul şi rădăcina veşnicei naturi!“

Vom afla în continuare secretele matematice ale Confreriei; în ritualul secretului şi al tăcerii se găseşte înglobat chiar numele Maestrului; nu aveai voie să-l rosteşti, era numit: „Acela, Nemuritorul, Geniul, Divinul“. Cuvintele (El însuşi a spus-o) rostite de acusmatici au rămas celebre. Chiar Herodot, în secolul următor morţii lui Pythagoras, îl numeşte cu respect: „Cel pe care nu îl voi numi”.

Legea întrajutorării, cultul prieteniei care îi era asociat, respectul pentru familie, supunerea faţă de legi când erau drepte, cultul eroilor, făceau parte din etica pitagoreică. Plutarh (care a readus la modă eroismul) şi Iamblichos ne-au transmis o sumedenie de anecdote despre tradiţiile pitagoreice rămase vii chiar pe vremea Romei Imperiale, în ciuda neplăcerii cu care, de la Cezar, autorităţile priviseră societăţile secrete, şi chiar „Colegiile” de meşteşugari (în schimb, Roma republicană îi ridicase în forum o statuie lui Pythagoras).

Ritualul pitagoreic impunea o curăţenie minuţioasă a corpului şi a veşmintelor (togă din in alb), cuprindea examenul zilnic de conştiinţă, folosirea parfumurilor (şi a unei tămâi speciale) şi a muzicii pentru a pune în armonie ritmurile sufletului cu cele ale corpului, cina comună unde era consumată numai carnea albă a animalelor admise pentru jertfele rituale:cocoşi albi, purcei şi iezi de lapte. Muzica, după cum vom vedea, juca un rol însemnat în Confrerie, atât ca ştiinţă asociată

matematicii proporţiilor, cât şi ca practică. Disciplinele matematice cele mai importante predate iniţiaţilor erau, în afara teoriei proporţiilor (corespunzând celei a intervalelor muzicale), studiul celor cinci corpuri solide regulate (numite mai târziu platoniciene) şi al construcţiilor geometrice înrudite, teoria numerelor figurate, în sfârşit „secretul iraţionalului", al existenţei numerelor iraţionale şi al folosirii lor. Contrar părerii adoptate în general, pitagoreicii nu căutau să nege existenţa numerelor iraţionale, dar, recunoscând corelaţia între anumite numere iraţionale şi simbolurile geometrice care alcătuiau însuşi nucleul simbolisticii lor secrete (pentagrama şi dodecaedrul, a căror construcţie riguroasă este întemeiată pe folosirea Secţiunii de Aur), ei păstrau cu străşnicie secretul construcţiilor aferente. Tocmai pentru că le-au divulgat pe acestea (construirea pentagonului şi a dodecaedrului) Hippocrates din Chios şi Hippasos din Metapont au fost excomunicaţi din Confreria reconstituită.

Într-o altă lucrare (*Numărul de Aur*), am vorbit pe larg despre reîntemeierea pitagorismului primitiv şi despre succesul neopitagorismului la Roma şi la Alexandria; acum vreau numai să completez schiţa înfăţişată aici arătând rolul lui Platon în revelarea şi dezvoltarea matematicii Şcolii. Am vrut să demonstrez, în *Numărul de Aur*, bazându-mă pe dialogurile pitagorizante (*Timaios, Philebos, Theaitetos, Banchetul*) şi pe *Scrisoarea a VII-a*, că Platon a fost un pitagoreic deplin iniţiat, îndeosebi în matematica sectei (care, deşi puţin cunoscută de profani, nu mai era secretă)şi că aprofundase el însuşi teoria proporţiilor şi pe aceea a celor cinci solide regulate numite platoniciene din pricina interesului pe care l-a arătat acestora. Teoria mea nu aduce nimic nou întrucât ea datează de pe vremea lui Cicero, care şi el, precum Caton cenzorul, Varron şi Seneca, era pitagorizant, dacă nu pitagoreic.

Scrisoarea a VII-a a lui Platon, recunoscută acum drept autentică de către cei mai importanţi specialişti în exegeza platoniciană, este unul dintre cele mai frumoase şi mai mişcătoare documente din istoria ideilor şi a simţămintelor omeneşti. Am vorbit mai înainte despre rolul prieteniei în etica pitagoreică; forma aceasta de prietenie era un sentiment de camaraderie afectuoasă, intermediară între prietenie şi iubire (cea din *Banchetul*), pentru care chiar jertfirea vieţii pentru un prieten este un lucru firesc. Platon însuşi a fost încercat în timpul vieţii de două asemenea simţăminte, cel dintâi fiind, la începutul formării sale intelectuale, adoraţia respectuoasă pentru Socrate, maestrul său, celălalt, în amurgul vârstei, afecţiunea pentru Dion din Siracuza, cumnat al tiranului Dionysos cel Bătrân, unchiul lui Dionysos cel Tânăr la care Platon a fost de două ori în vizită gândind să-l convertească la concepţia pitagoreică despre îndatoririle suveranului. Curtea din Siracuza este, pe de altă parte, amestecată

direct în iniţiativa lui Platon, căci, după o tradiţie culeasă de Diogenes Laertios şi care pare dovedită, Philolaos, unul dintre conducătorii Confreriei scăpaţi din măcelul de la Metapont, ar fi dezvăluit în scrisorile sale nu numai secrete filosofice şi matematice, dar, ispitit de imensa sumă oferită, ar fi vândut lui Dionysos cel Bătrân (cumnatul lui Dion) trei cărţi care cuprindeau esenţa doctrinei secrete a sectei. Studiul acestor texte, înlesnit de amicul său Dion, apoi legătura de prietenie cu Archytas din Tarent, ar fi dus la convertirea definitivă a lui Platon la pitagorism.

De altfel, este şi părerea lui Gomperz (*Platon's Selbstbiographie*) că Scrisoarea a VII-a dă cheia vieţii şi operei lui Platon; cei doi poli tragici ai vieţii sale sufleteşti, moartea crudă şi sublimă a lui Socrate şi omorârea lui Dion, întâmplată în toiul neînţelegerii (scrisoarea este adresată urmaşilor lui Dion), sunt evocaţi aici în cuvinte mişcătoare.

Archytas din Tarent, de şapte ori generalisim şi regent al Tarentului, care întemeiase în această cetate un stat pitagoreic prosper, şi care cunoscuse pe Philolaos, s-a aflat între gândirea pitagoreică iniţială autentică şi Platon; Tarent a fost pentru acesta din urmă încarnarea cetăţii ideale guvernată de filosofi matematicieni (vezi *Republica*), iar numele lui Archytas, tot atât de mare matematician pe cât a fost om de stat şi conducător militar, este întâlnit de mai multe ori în Scrisoarea a VII-a.

Dionysos cel Tânăr, care îi luase locul tatălui său ca tiran, l-a invitat pe Platon să se întoarcă la Siracuza întrucât, zicea el, se împrietenise acum cu „Archytas şi cu cei din Tarent“, tânărul tiran trimite într-o corabie de război pe Archedemos, „din cercul intim al lui Archytas”, şi o scrisoare „de la Archytas şi cei din Tarent”, care adeverea proaspătul zel al tiranului în căutarea adevărului; cei care fac invitaţia trag nădejde că recenta prietenie înfiripată între Tarent şi Siracuza nu va fi compromisă de un refuz al lui Platon. Acesta cedează în interesul lui Dion „şi al prietenilor şi Fraţilor întru Doctrină”; el arată că „prietenii lui Archytas” (pitagoreicii) l-au îndemnat să întreprindă această a treia călătorie în Sicilia „nădăjduind să fiu folositor filosofiei şi prietenilor mei”. La acea vreme Dion era certat cu nepotul său şi exilat din Sicilia, fapt ce explică osteneala pe care şi-o dă Platon pentru a-şi îndreptăţi călătoria şi prezenţa la curtea tânărului Dionysos. A băgat curând de seamă că acestuia nici prin gând nu-i trecea să ducă viaţa plictisitoare a unui iniţiat şi să reformeze guvernarea din Siracuza, şi, simţindu-se chiar în primejdie de moarte, a trimis un mesaj „lui Archytas şi celorlalţi prieteni din Tarent”. Archytas trimite îndată o galeră de război cu cincizeci de vâsle şi cu ambasadorul extraordinar Lamiskos, care cere punerea în libertate a lui Platon. Acesta se îmbarcă şi părăseşte Siracuza, de data aceasta pentru totdeauna. Referirile la filosofia propovăduită de

„Archytas şi prietenii săi", adică la pitagorism, sunt în acelaşi timp discrete şi bătătoare la ochi: „Ceea ce ştiu este că şi alţii au putut scrie despre asemenea lucruri, dar care anume sunt autorii adevăraţi n-o ştiu nici ei. Atât aş avea de spus cu privire la cele ce s-au scris sau se vor mai scrie de către toţi cei ce spun că ştiu lucrurile ce mă frământă pe mine, fie că m-au ascultat pe mine însumi rostindu-le, fie că au ascultat pe alţii ori le-au aflat ei înşişi; că în ce-i priveşte pe toţi aceştia, nici unul nu înţelege, după părerea mea, despre ce e vorba. Bineînţeles că nu există vreo lucrare de a mea pe această temă şi nici nu va exista vreodată; căci nu e de fel ceva de pus în vorbe, ca alte învăţături, ci doar printr-o lungă experienţă a lucrului acestuia şi printr-o convieţuire cu el se poate întâmpla ca dintr-o dată, ţâşnind ca din foc, să se înalţe o lumină, care, o dată ivită în suflet, se hrăneşte din ea însăşi."

Şi, imediat,pasajul următor:

„Nu încape nici o primejdie să uiţi aşa ceva, o dată ce ai prins lucrurile cu mintea, ele concentrându-se în tot ce poate fi mai scurt... doar o mână de oameni ştiu de aşa ceva."

Ne duce gândul la fragmentele din Hieros Logos, ca principiu de analogie (Natura mereu asemănătoare sieşi).

În ciuda discreţiei sale astfel subliniată, în dialogurile pitagoreice Platon ne dezvăluie câteva fragmente din matematica pitagoreică (care de altfel nu mai era secretă, cel puţin în linii mari), îndeosebi cele care tratau despre Teoria proporţiilor, despre teoria gamelor, despre cele cinci solide regulate; dar nu dă nici o explicaţie atunci când menţionează că dodecaedrul i-a servit Zeului ordonator drept model pentru armonia Cosmosului; de-abia în secolul al XVI-lea a găsit Luca Pacioli cheia acestei enigme. Celor care ar fi interesaţi să afle amănunte mai precise despre organizarea Confreriei pitagoreice şi despre influenţa neopitagorismului în Roma Republicană apoi Imperială, şi în Alexandria, le recomand încă o dată lucrările lui Delatte, Carcopino şi Meautis, precum şi cartea mea *Numărul de Aur* (vol. II, *Riturile*). Înainte să închei acest capitol mai curând biografic, în care Numărul nu apare decât în treacăt, mai doresc să lămuresc legenda, ştiută deja în lumea elenistică, conform căreia după ce şi-au stabilit Filosofia Numărului luând în considerare numerele întregi, pitagoricienii ar fi rămas consternaţi descoperind existenţa lui $\sqrt{2}$ şi a celorlalte numere iraţionale. Adevărul pare să fie că, dimpotrivă, nucleul doctrinei lor a fost stabilit pe baza geometriei lungimilor iraţionale, marile lor secrete fiind construirea pentagonului regulat şi a dodecaedrului[18], acestea provenind şi ele din cea a Secţiunii de Aur. În legătură cu cartea a IV-a a lui Euclid, în care este prezentată construirea pentagonului regulat prin intermediul „mediei şi extremei

raţii" (nume dat de Euclid Secţiunii de Aur), un scoliast scrie: „Această carte este în întregime descoperirea pitagoreicilor."

Pentagrama (pentagonul regulat în formă de stea) care furnizează un şir de proporţii de aur era, după cum ştim de la Lucian, parola şi simbolul cel mai însemnat a membrilor confreriei; această proporţie din Secţiunea de Aur care domină cele mai însemnate trei figuri geometrice ale misticii pitagoreice, pentagonul, pentagrama şi dodecaedrul este exprimată de numărul iraţional

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618$$

În capitolele următoare vom prezenta disciplina pitagoreică a Numerelor Figurate şi Secţiunea de Aur.

Cer iertare pentru că în acest capitol am lăsat să treacă biografia şi istoria înaintea matematicii propriu-zise, care părea că trebuie să ofere substanţă acestei cărţi; dar dezvoltarea de mai târziu a Teoriei Numerelor nu poate fi bine înţeleasă fără oarecare familiarizare cu viaţa şi gândirea celor doi mari filosofi ai Numărului, Pythagoras şi Platon.

Cititorul ar putea crede că am făcut în aşa fel încât să exagerez pitagorismul lui Platon; voi cita în continuare două pasaje din expunerea cărţii *Plato's Theory of Ideas*, de Sir David Ross apărută în revista *Studies* publicată la Dublin de Părinţii Ieziuiţi (Oxford University Press, 1951):

„Sir David Ross susţine că Platon s-a interesat din ce în ce mai mult de matematică (către sfârşitul vieţii) şi că abia atunci şi nu mai devreme - după cum susţinuseră Taylor şi Bumet - a suferit influenţa pitagoreică. După Aristotel, Platon a socotit atunci ideile ca *Numere* şi a gândit că elementele Ideilor erau elementele tuturor lucrurilor, - fapt ce poate însemna doar că îşi închipuia că la baza universului stătea o structură bine proporţionată.

Ca adaos la această strânsă asociere între Idei şi Numere în ultima fază a teoriei sale „ideale"[4], Platon a introdus alte entităţi spaţiale, pe care Aristotel le menţionează în trei pasaje sub denumirea de „lucruri de după numere". El vorbeşte despre „linii, planuri şi solide care vin după numere" (numerele figurate). S-ar părea că, recunoscând o clasă de Idei ca fiind Numere, „a recunoscut, de asemenea, un grup secundar de Idei asociat geometriei şi cuprinzând în esenţă o referire la extensiunea spaţială." (Această expunere este datorată Părintelui Reverend John Murray, S.J.).

CAPITOLUL V

GÂNDIREA OCCIDENTALĂ ŞI PRINCIPIUL ANALOGIEI -PROPORŢIA, REFLECTARE MATEMATICĂ A ANALOGIEI -TEORIA PITAGOREICĂ A PROPORŢIILOR -SECŢIUNEA DE AUR -„SYMMETRIA" LUI VITRUVIU ŞI PRINCIPIUL ANALOGIEI AL LUI THIERSCH

Ce ţi-e şi cu diavolul analogiei abstracte!
De-aţi şti cum mă chinuie câteodată!
(Paul VALERY, Monsieur Teste)

Poate că cea mai importantă dintre formulele scurte şi secrete pe care le aminteşte Platon în Scrisoarea a VII-a, formule publicate câteva secole după moartea lui Pythagoras, este, după „Totul este rânduit după Număr", Principiul analogiei formulat de Maestru în aceşti termeni:

„Vei cunoaşte, atât cât este cu putinţă pentru un muritor, că Natura este în totul asemănătoare sieşi".

Ecoul acestor cuvinte răsună încă în „Pădurea simbolurilor" de Baudelaire şi în „Demonul analogie" de Mallarme; principiul este reflectat de-a lungul dezvoltării ştiinţei, filosofiei, magiei (cer iertare că o amintesc aici, dar a avut un rol însemnat în transmiterea simbolurilor antice şi a principiului despre care este vorba), în sfârşit al artelor din Occident, incluzând arhitectura grecească, apoi pe cea gotică şi chiar literatura (metafora este condensarea eliptică a unei analogii). Să nu uităm muzica şi modulaţiile sale.

Ca să începem cu ceea ce în acest domeniu are legătură cu numerele, vom stabili mai întâi de toate că proporţia, în general, este o echivalenţă sau o egalitate analogică. Noţiunea de raport o precedă logic pe cea de proporţie al cărei element este; îmi iau îngăduinţa să dau câteva definiţii preliminare folositoare expunerii care urmează.

Raportul aritmetic, comparaţie a două mărimi măsurabile, este un caz particular al judecăţii, al operaţiei-tip a inteligenţei; la rândul său aceasta este:

1° percepţia unei relaţii funcţionale sau a unei ierarhii de valori între două obiecte ale cunoaşterii;

2° discernerea sau comparaţia valorilor, calitativă sau cantitativă. Când această comparaţie ajunge la o evaluare cantitativă netă, rezultatul este un raport care are forma unei fracţii aritmetice sau algebrice, a/b, şi toate proprietăţile unei fracţii. De exemplu, el este echivalent cu câtul dintre a şi b, adică cu un *număr*.

Proporţia, conform definiţiei lui Euclid, este „echivalenţa a două

raporturi", relaţia analogică între două comparaţii; când această echivalentă este egalitatea a două raporturi algebrice, avem $A/B = C/D$ sau $a/b = c/d$, dacă a, b, c, d sunt numerele care măsoară mărimile A, B, C, D, cu aceeaşi unitate. Ceea ce se poate enunţa astfel:

A este pentru B cum este C pentru D, expresie care arată îndată relaţia între această egalitate şi principiul analogiei. De altfel, după cum arată deja Vitruviu, proporţia geometrică se numeşte în limba greacă anvalogia, analogie. Când doi termeni (termenii intermediari) sunt egali, obţinem proporţia geometrică continuă $a/b = b/c$;*b* fiind media (medietatea) geometrică între cei doi extremi. Ideea de medietate sau legătură armonică între două elemente ale unei formule sau ale gândirii joacă un rol cu totul deosebit la Platon (vezi definiţia dată de el proporţiei în *Timaios*: „dar e cu neputinţă să combini cum trebuie două lucruri fără un al treilea: trebuie între ele o legătură care să le unească").

O proporţie geometrică poate avea un număr oarecare de termeni:

proporţie discontinuă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \ldots$ etc.

proporţie continuă $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$ ...etc.

După cum vedem este vorba întotdeauna de permanenţă, de *invarianţa* unui raport caracteristic. Grecii preferau să pună proporţia continuă sub formă de progresie geometrică a, b, e, d, e etc. (la fel cu 1,2,4,8,16 etc.).

Pitagoreicii nu s-au mărginit la studiul proporţiei geometrice. în domeniul raportului ei stabiliseră deja zece tipuri de raporturi începând cu raportul a/b, care era

„compus" în $\frac{a+b}{b}$

„despărţit" în $\frac{a-b}{b}$

„convertit" în $\frac{b}{a-b}$

Iată, cu titlu informativ, numele acestor raporturi tip:

1° Multiplu.

2° Supraparticular, având la numărător întregul plus o parte din întreg, ca de exemplu:

sescvialter (are la numărător în plus jumătate din numitor),

$12/8, 3/2$ (cvinta);

sescviterţian (o treime în plus), $8/6, 4/3$ (cvarta) etc.;

$\frac{n+1}{n}$ face parte din acest tip general.

3° Suprabipartit $\frac{5}{3}$ (3 + 2 părţi);

Supratripartit $\frac{7}{4}$ (4 + 3 părţi).

4° Multiplu supraparticular, cuprinde: dublu sescvialter (conţine la numărător de două ori numitorul plus jumătate);

Triplu sescvialter etc.

5° Multiplu suprapartit.

Şi cele cinci inverse: submultiplii etc.

Pitagoreicii din Sicilia stabiliseră deja cele mai importante trei tipuri de proporţii, care pot fi simbolizate algebric prin:

b - a = d - c proporţie aritmetică

$a/b = c/d$ proporţie geometrică

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$ proporţie armonică.

Dacă considerăm proporţiile continue (cu trei termeni), vom avea:

b-a = c-b ca 1, 2, 3

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ = ca l, 2, 4

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$ ca 2, 3, 6.

Putem, de asemenea, simboliza aceste trei proporţii prin ecuaţiile echivalente:

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{c}$$

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{c-b}{b-a}=\frac{c}{a}$$

Uitându-ne la a treia ecuaţie ne dăm seama că proporţia armonică este o combinare a celorlalte două; ea apare în muzică (în studiul intervalelor diatonice şi armonice), în timp ce proporţia geometrică, *analogia* lui Vitruviu, mama similitudinilor geometrice, domină artele vizuale, în mod deosebit arhitectura. Aceste trei tipuri principale de proporţii erau cunoscute de pitagoreici încă de pe vremea Ligii crotoniate şi au fost pesemne comunicate lui Platon de către Archytas din Tarent în timpul primei sale călătorii în Magna Graecia. Eudoxiu şi discipolii apropiaţi ai lui Platon le-au ridicat numărul la şase, apoi neopitagoricienii Myonides şi Euphranor,prin secolul I î.Hr., au mai găsit patru, ridicând numărul total la 10[19], numărul Decadei, scump Confreriei, pe care îl găsiseră deja în numărul raporturilor posibile.

Am arătat mai înainte că lui Platon îi plăcea să conceapă proporţia ca pe o „medietate“, legătură de armonie între două mărimi.

Iată relaţiile între mezi şi extremi în cele trei tipuri uzuale de proporţii:

Media aritmetică a lui a si b ... $\frac{a+b}{2}$

Media geometrică a lui a şi b ... $\sqrt{ab}$

Media armonică a lui a şi b ... $\frac{2ab}{a+b}$.

Aceasta din urmă se mai poate scrie: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, care se armonizează cu formulele de mai sus pentru proporţiile cu trei termeni

b-a = c-b proporţie aritmetică

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ proporţie geometrică

$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$ proporţie armonică.

Conceptul de medie poate fi aplicat unui număr oarecare de

termeni; de exemplu pentru 5 termeni a, b, c, d, e:

Ma = Medie aritmetică $\frac{a+b+c+d+e}{5}$

Mg = Medie geometrică $\sqrt[5]{abcde}$

Mh = Medie armonică $\frac{5}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}}$

Dacă ne întoarcem la cei doi termeni iniţiali a şi b, avem între cele trei medii următoarea relaţie:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a+b}{2} \times \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$$

sau: media geometrică a două mărimi este în acelaşi timp media geometrică între media lor aritmetică şi media armonică.

Pentru a stabili logic şirul celor zece proporţii, Nicomachos din Gerasa şi Theon din Smirna folosesc „Principiul economiei" şi pe cel al „Aceluiaşi şi al Celuilalt".

Să-l citǎm pe Nicomah:

„Principiul care guvernează aceste probleme de proporţii poate arăta că toate varietăţile acestor specii pot să se tragă numai din egalitate precum dintr-o mamă sau dintr-o rădăcină..."

Şi pe Theon:

„Luăm astfel trei mărimi şi proporţiile care rezidă în ele; schimbăm între ei termenii şi arătăm că toată matematica este constituită din proporţiile dintre cantităţi şi că sursa şi elementele sale se rezumă în esenţa proporţiei."

Nicomachos şi Theon ajung la cele zece tipuri prezentate mai sus permutând în toate felurile cu putinţă literele a, b, c cu expresia iniţială $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Al zecelea tip, $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$, este foarte important, căci sub aparenţa sa discretă se ascunde principiul formării şirului definit prin recurenţă cu doi termeni, sau şirul lui Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

21, 34, 55, 89...

$\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$ echivalează într-adevăr cu c = a + b după cum ne

putem da seama înmulţind în crucea Sfântului Andrei cei patru factori ai celor două fracţii şi făcând reducerea.

Am arătat deja că lui Platon i-a plăcut în mod deosebit conceptul de medietate, pe care îl aplică fără deosebire la proporţii din domeniul matematicii, muzicii, cosmogoniei şi chiar al metafizicii. Pentru el, „problema armonică generală" constă în a intercala medietatea necesară pentru a lega două mărimi, două intervale muzicale sau două entităţi logice, două temperamente şi a stabili o consonanţă (asumfonia).

Termenul mediu într-un silogism, strălucirea metaforei potrivite, „numărul" sau raportul caracteristic ce înşiruie proporţiile şi produce euritmia finală într-un traseu arhitectural (vezi la note „fraza cheie" a lui Vitruviu) toate acestea pentru Platon şi neopitagoreici ţin de conceptele de proporţie şi de medietate.

Îndeosebi în arhitectură conceptul de proporţie şi cel de simetrie sau mai degrabă de *symmetria**[20]***, care rezultă din el, domină într-adevăr nu numai arhitectura grecească şi romană, ci şi arhitectura gotică, ale cărei diagrame secrete de punere în proporţie se transmiteau direct din tată în fiu sau de la maestru la discipol şi erau derivate din geometria pitagoreică şi din tainele sale păstrate cu străşnicie.

Aceste concepte apar şi în arhitectura şi pictura Renaşterii timpurii, după cum reiese în urma punerii în lumină de către Luca Pacioli, „călugărul beat de frumuseţe", a teoriei proporţiilor a lui Platon, a studiului celor cinci corpuri regulate şi a Secţiunii de Aur sau *Proporţia Divină*, chiar titlul lucrării sale publicată la Veneţia în 1509 şi ilustrată cu frumoasele epure ale prietenului său, Leonardo da Vinci. Am arătat în amănunt, în mai multe lucrări, legătura dintre pitagorism şi arhitectura marilor epoci occidentale (vezi *Numărul de Aur*, vol. 2).

A venit momentul să citäm forma principiului analogiei în Arte stabilită de Thiersch în secolul al XlX-lea; este vorba de arhitectură, dar principiul se aplică la fel de bine în compoziţia picturală şi în muzică.

„Privind cu atenţie cele mai izbutite opere din toate timpurile am descoperit că în fiecare dintre ele o formă fundamentală se repetă, şi că prin compunerea şi dispunerea lor părţile formează figuri asemănătoare... Armonia nu rezultă decât din repetarea figurii principale a operei în subdiviziunile sale." (*Die Proportion in der Architektur*.)

Acestea sunt chiar învăţăturile Principiului analogiei al lui Pythagoras transmise de către arhitecţii greci, iar Alberti, un alt prieten al lui Leonardo, el însuşi unul dintre oamenii cei mai completi ai Renaşterii, în tratatul său despre arhitectură, de o puritate de cristal, redactat în latină, repetă chiar cuvintele lui Pythagoras:

Certissimum estnaturam in omnibus sui essepersimilem.

Şi în legătură cu „lineamenta“ sau linii regularizatoare ale planului, *...in aedificiis esse lineamenta se n ti amu s, ubi una, atque eadem in illis spectetur forma*.

Vom vedea mai departe, în legătură cu Numărul în muzică, faptul că Pythagoras a fost, după o tradiţie de necontestat, inventatorul gamei diatonice şi deci tatăl întregii muzici occidentale. Matematica pitagoreică, mai ales teoria proporţiilor, dezvoltată ulterior de Platon, a fost rezultatul studiului intervalelor muzicale. într-adevăr, grecii nu comparau frecvenţele corzilor vibratorii, pe care nu le măsuraseră, ci lungimile lor, ceea ce însemna acelaşi lucru (frecvenţele şi lungimile sunt invers proporţionale), iar teoria rezultând din intervalele muzicale şi din proporţiile lor putea mai apoi să fie transferată direct la studiul proporţiilor între mărimi lineare oarecare. Regăsim aici şi Tetraktys-ul, şi unul dintre motivele însemnătăţii sale, faptul că progresia 1, 2, 3, 4 oferă principalele raporturi dintre intervalele gamei diatonice, cel de 4 la 2 sau de 2 la 1 octava (dia paswn),cel de31a 2 cvinta(dia pente), prezenţa numărului5 = 3 + 2 sau Pentada ridicând în slăvi importanţa cvintei din care a rezultat gama diatonică pitagoreică (vezi cap. XVII), cel de 4 la 3 cvarta; putem aşadar spune împreună cu Delatte că:

„Tetraktys-ul este mulţimea celor patru numere ale căror raporturi reprezintă acordurile muzicale esenţiale".

Tetraktys-ul ajunge astfel să fie identificat cu Armonia însăşi (este şi un aspect, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, al Divinei Decade).

„Catehismul" pitagoreic citat de Iamblichos spunea, între altele, (menţionat mai înainte):

„Tetraktys, armonie pură, aceea a Sirenelor!" (Este vorba despre sirenele cosmice, portavoce planetară a armoniei Sferelor.)

Pentru a sublinia şi mai mult intensitatea extatică la care putea ajunge ceea ce am numit în altă parte „Mistica îngheţată a Numărului Pur" şi mai ales venerarea Tetraktys-ului, voi cita iarăşi un alt text pitagoreic cunoscut sub numele de „Rugă către Tetraktys", care este, totodată, o invocare a numărului divin:

„Binecuvântează-ne, număr divin, tu care i-ai zămislit pe zei şi pe oameni! O sfânt, sfânt Tetraktys, tu care eşti cuprins în rădăcina şi în izvorul şuvoiului veşnic al creaţiei! Căci numărul divin începe cu unitatea pură şi profundă şi atinge mai apoi numărul Sacru Patru; apoi el o zămisleşte pe mama a toate câte sunt, care leagă totul, cel dintâi

născut, cel care nu greşeşte niciodată, care nu pregetă niciodată, Zecele Sacru, care ţine cheia tuturor lucrurilor".

Înainte să părăsim domeniul Proporţiei doresc să prezint două proporţii îndrăgite de pitagoreici, şi anume, Proporţia Universală, un grup de patru numere care înseamnă prescurtarea celor trei tipuri principale de proporţii şi o reflectare muzicală a Tetraktys-ului, cealaltă proporţie fiind „Secţiunea de Aur" sau Proporţia Divină pe care am menţionat-o deja şi despre care vom vorbi în celelalte capitole.

Proporţia Universală era progresia complexă 6, 8, 9, 12 din care puteau rezulta: 12-9 = 9- 6, proporţie aritmetică cu raţia 3

$$\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$$ proporţie geometrică

$$\frac{12-8}{8-6} = \frac{12}{6}$$ proporţie armonică.

Proporţia Universală are şi proprietatea complementară foarte importantă de a furniza, prin raporturile dintre numerele sale, intervalele gamei pitagoreice, de fapt aceleaşi pe care le furnizează şi Tetraktys-ul; dacă luăm o liră tetracordă cu corzile proporţionale cu 6, 8, 9, 12 (frecvenţele notelor sunt în ordine inversă 12, 9, 8, 6 de la stânga la dreapta) astfel încât coarda 12 să corespundă notei Mi_1

vom avea: tonul $La_1\ Si_1 = \frac{9}{8}$

octava $Mi_1, Mi_2 = \frac{12}{6} = 2$

cvarta $Mi_1, La_1, = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

cvinta$Mi_1\ Si_1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

(Fig.l,Planşa III)

Vedem aici motivul pentru care pitagoricienii au inventat tipuri speciale de raporturi numite sescvialtere etc., şi utilitatea lor în teoria gamei (în mod deosebit a gamei diatonice a cvintelor pe care o vom studia în capitolul XVII).

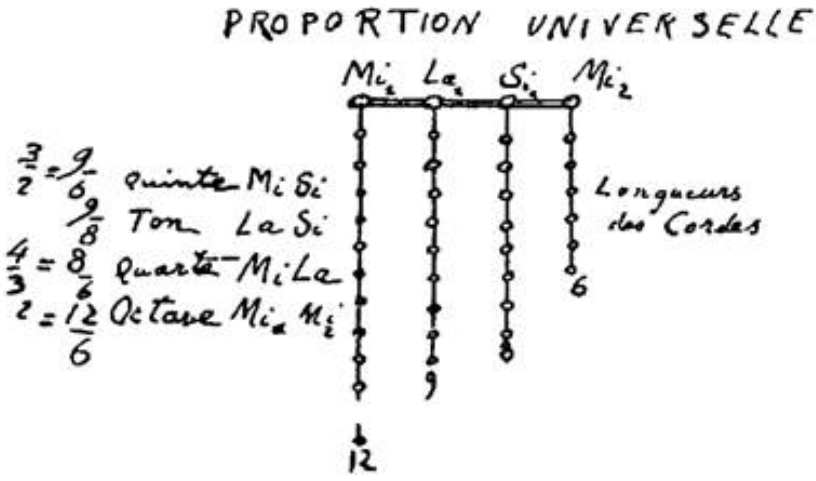


Fig. 1

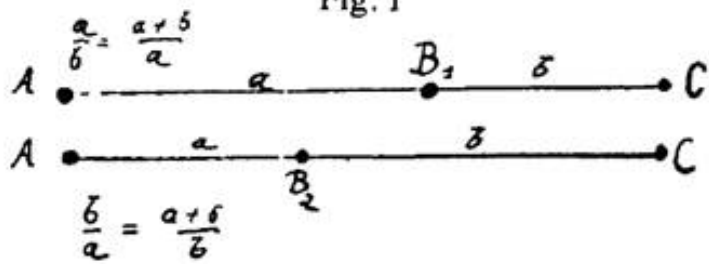


Fig. 2

PLANŞA III

Nu am epuizat proprietăţile pentru care discipolii lui Pythagoras se simţeau atât de mult atraşi de Proporţia Universală 6, 8, 9, 12; ea are într-adevăr şi un aspect geometric datorat faptului că:

6 reprezintă numărul de feţe ale cubului
8 reprezintă numărul vârfurilor cubului
12 reprezintă numărul laturilor cubului
9 se mulţumeşte să fie pătratul primului număr masculin.

Proporţia Divină sau Secţiunea de Aur, a cărui alcătuire pare să fi fost secretul matematic păstrat cu cea mai mare străşnicie de către Confreria pitagoreică şi care guvernează nu numai cea mai mare parte a planurilor arhitecturii greceşti, apoi gotice, ci şi morfologia biologică, se poate stabili plecând de la logica pură, cel puţin de la „Principiul economiei conceptelor” al lui William Ockham, doctor scolastic din secolul al XlV-lea (*Entia non sunt multiplicanda sine necessitate*). Acest principiu este în oarecare măsură aspectul logic al

principiului minimei acţiuni.

Secţiunea de Aur este într-adevăr modul cel mai logic de a împărţi asimetric (adică altfel decât prin împărţirea în două părţi egale) o mărime măsurabilă, de exemplu un segment de dreaptă AC, în două mărimi inegale, astfel încât raportul dintre cea mare şi cea mică să fie egal cu raportul dintre suma celor două (întregul) şi cea mare. Atunci, dacă B este punctul care împarte astfel dreapta AC şi dacă AB = a si BC = b, avem prin definiţie $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b}$, adică o proporţie geometrică. Pentru a obţine aceeaşi ecuaţie prin principiul economiei plecăm de la proporţia continuă cu trei elemente a, b, c, adică $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ apoi punem „din economie” c = a + b,reducând cele trei elemente ale proporţiei la 2, a şi b, de unde $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$. Aici a este segmentul cel mai mic, dar cele două ecuaţii sunt echivalente şi dau aceleaşi soluţii. Reducând cele două ecuaţii, obţinem în primul caz $a^2 = ab + b^2$ sau, împărţind peste tot cu b^2

$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} + 1$ sau $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$ din forma

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Necunoscuta $\frac{a}{b}$ este egală cu $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots$ ... rădăcină pozitivă 1,618..., şi $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$ ..., rădăcină negativă.

Rădăcina negativă este egală cu inversul (cu semnul -) rădăcinii pozitive, căci 0,618 = $\frac{1}{1{,}618}$.

A doua egalitate tratată la fel dă

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

$\frac{b}{a}$

şi rădăcinile au aceeaşi valoare, numai că aici $\frac{b}{a}$ este mai mare decât 1. Cele două operaţii reprezintă respectiv poziţiile B_1 şi B_2 pe segmentul AC dacă este vorba de un segment de dreaptă ce trebuie împărţit conform proporţiilor Secţiunii de Aur. (Fig. 2, Planşa III).

O altă metodă şi mai logică (dar mai înceată) pentru a găsi ecuaţia fundamentală $x^2 - x - 1 = 0$ constă în a desemna prin a, b, c, lungimile respective AB, BC, AC, apoi în a forma toate raporturile posibile între cele trei elemente; obţinem astfel

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}.$$

Egalând pe rând aceste raporturi două câte două, obţinem toate proporţiile posibile între aceşti 3 termeni, adică 15 proporţii care se reduc în final la împărţirea simetrică a = b şi la împărţirile asimetrice $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ (a = AB fiind cel mai lung dintre cele două segmente AB şi BC) şi $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ (b = BC fiind cel mai lung), înlocuind pe c cu $a + b$ a obţinem din nou egalităţile reduse obţinute mai sus şi ecuaţia fundamentală:

$$x^2 - x - 1 = 0 \text{ sau } x^2 = x + 1 \quad [21]$$

Raportul Secţiunii de Aur este, în general, simbolizat prin Ø.

Atunci $Ø^2 = Ø + 1$, de unde, înmulţind cei doi termeni cu Ø de un număr nedefinit de ori, avem $Ø^n = Ø^{n\_1} + Ø^{n‘2}$.

Adică în orice progresie geometrică cu raţie Ø , fiecare termen este egal cu suma celor doi care îl precedă.

Expresia rămâne adevărată dacă n este negativ, n = - m.

Atunci $\frac{1}{Ø^m} = \frac{1}{Ø^{m+1}} + \frac{1}{Ø^{m+2}}$, fiecare termen este egal cu suma următorilor doi, progresia este descendentă. (Fig. 3, Planşa IV).

În planşa IV, figurile 1 şi 2, sunt date cele două construcţii clasice ale Secţiunii de Aur; în prima se dă AB segmentul cel mai mare, în a doua întregul (suma de obţinut a celor două segmente), AC.

Construcţiile rezultă din expresia $Ø = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi teorema pătratului ipotenuzei.

Asemeni Secţiunii de Aur, pentagonul regulat, pentagrama (pentagonul în formă de stea) şi decagoanele regulat şi în formă de stea sunt legate prin expresiile:

(dacă P_r este latura pentagonului regulat
P^e este latura pentagonului în formă de stea
D_r este latura decagonului regulat
D_e este latura decagonului în formă de stea
R este raza cercului circumscris)

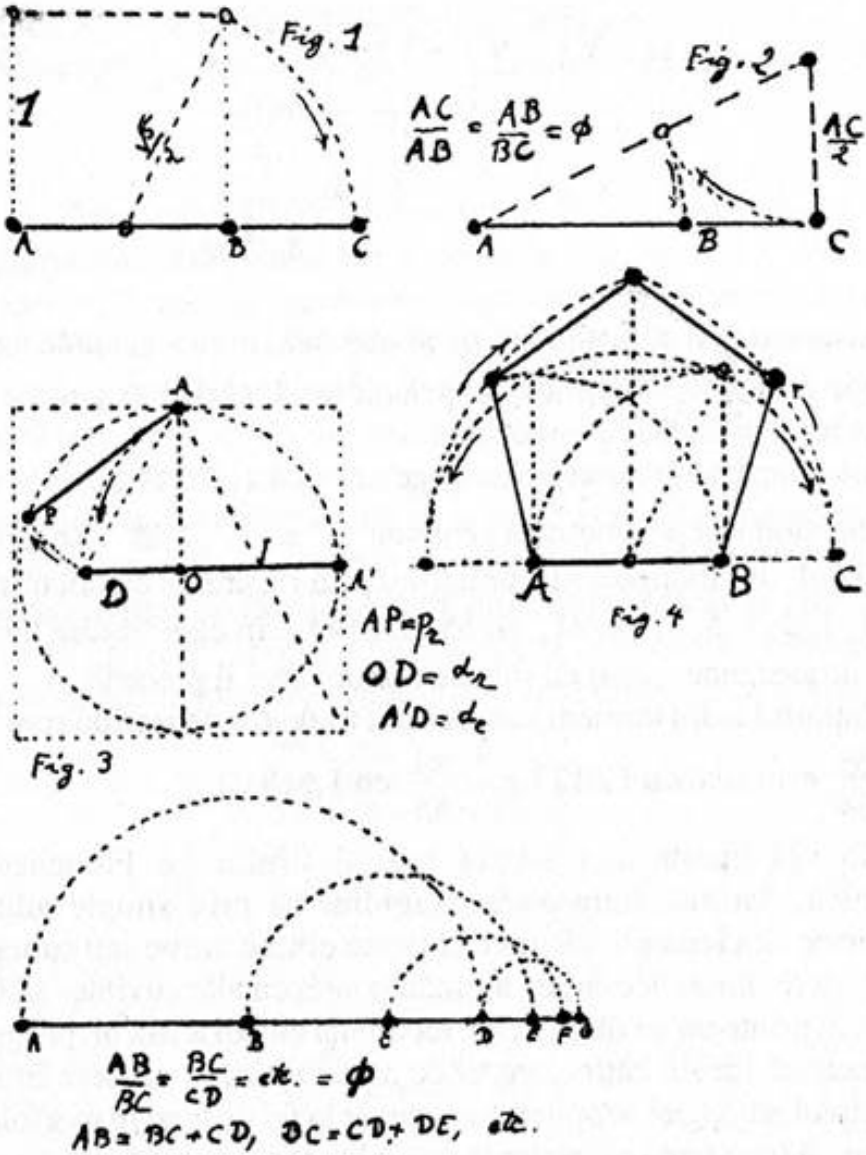
$$\frac{Pe}{Pr} = \emptyset \frac{R}{Dr} = \emptyset \frac{De}{R} = \emptyset$$

laturile acestor patru poligoane se vor obţine prin construcţii bazate tot pe construcţia Secţiunii de Aur; de exemplu: 1° să se găsească laturile pentagonului; ale pentagramei, ale decagonului regulat şi ale decagonului în formă de stea înscrise într-un cerc dat (fig. 3, pl. 4) şi 2° să se construiască un pentagon cu latura dată (fig. 4, pl. IV).

Expresiile importante în întrebuinţarea algebrică a Secţiunii de Aur sunt:

$\emptyset = 1{,}61803...$ sau practic 1,618; $\emptyset_2 = 2{,}618$

$$\frac{1}{\emptyset} = 0{,}618; \quad \sqrt{5} = 2\emptyset - 1 = 2{,}236$$



PLANȘA IV

Numărul algebric (adică rădăcina unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali) $\emptyset$ este cel mai „original” şi cel mai important din mulţimea numerelor algebrice. Avem[22] într-adevăr expresiile următoare:

$$\emptyset = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Şi $\text{Ø} = 1 + \cfrac{1}{1 * \cfrac{1}{1 * \cfrac{1}{1 * \cfrac{1}{1 * \cfrac{1}{\ddots}}}}}$

Aceste relaţii strânse între Ø şi unitatea, monada, „rădăcină“ a tuturor numerelor, explică proprietăţile algebrice şi geometrice extraordinare ale Secţiunii de Aur.

În legătură cu şirul sau progresia geometrică 1, Ø, Ø^2, Ø^3, ... 0^n, voi menţiona că proprietatea generală $\text{Ø}^n = \text{Ø}^{n-1} + \text{Ø}^{n-2}$ se găseşte şi în şirul lui Fibonacci sau şir definit prin recurenţă cu doi termeni F= 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... în care fiecare termen este, de asemenea, egal cu suma celor doi care îi precedă.

Raportul a doi termeni consecutivi tinde foarte repede spre Ø ($\frac{55}{34}$ este egal cu 1,6177 si... $\frac{89}{55}$ cu 1,618...).

Nu voi insista aici asupra rolului şirului lui Fibonacci în botanică, datorat, între altele, faptului că prin simple adunări uniforme de elemente identice el poate obţine curbe sau suprafeţe de creştere omotetice, adică asemănătoare, cu alte cuvinte să înlocuiască, printr-un şir definit prin recurenţă cu doi termeni, progresia geometrică ideală către care tinde asimptotic, în numere întregi. Principiul analogiei se aplică într-adevăr la fel de bine în morfologia biologică (creşterea plantelor, a scoicilor etc.), ca şi în artă.

Îi trimit din nou pe cititorii curioşi să afle mai multe despre acest subiect la cartea mea *Numărul de Aur*; vor găsi acolo şi amănunte despre rolul formelor înrudite cu şirul Ø (pentagonul,dodecaedrul,icosaedrul) în morfologie şi despre prezenţa lor în reţeaua de proporţii a corpului omenesc. Aici mă voi mulţumi să mai aduc puţină lumină în problema proporţiilor pur aritmetice şi algebrice ale şirului Ø.

Încep prin a preciza că proprietatea lui Ø de a fi limită a raportului între doi termeni consecutivi este comună nu numai şirului F şi şirurilor numerice recurente înrudite, ci şi tuturor şirurilor definite prin recurenţă obţinute plecând de la doi termeni oarecare şi al căror tip este

a, b, (a + b), b + (a + b), b + 2 (a + b), 2b + 3 (a + b), 3b + 5 (a + b);...sau a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b,...

Numind U_n termenul de rang n al acestei serii avem la limită:

$$\frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} = \text{Ø}\frac{(a+b\text{Ø})}{(a+b\text{Ø})} = \text{Ø}$$

Una dintre proprietăţile caracteristice ale funcţiei exponenţiale în analiză, anume că derivatele primă, secundă... etc., de ordinul a^x o reproduc identic, îşi are contraponderea într-o altă proprietate comună progresiei Ø şi tuturor şirurilor definite prin recurenţă cu doi termeni, dintre care şirul Fibonacci sau şirul F este tipul cel mai pur; diferenţele primă, secundă etc. ale termenilor din aceste şiruri reproduc nedefinit şirul iniţial.

Folosindu-ne de conceptul grecesc al numerelor figurate (care îşi are locul în capitolul următor), am putea să dăm numerelor din şirul lui Fibonacci numele de numere „spirale”; fac din nou trimitere la lucrările mele de estetică pentru cititorii interesaţi de raporturile dintre Ø, şirul F, spirala logaritmică şi „creşterea gnomonică”. Tabelul următor va lămuri legăturile strânse dintre şirul Ø şi şirul F:

$$\text{Ø}_{\circ} = 0 + 1 = 1 + 0$$

$$\text{Ø}^{1}{}_{*} = 0 + \text{Ø} = 1 + \frac{1}{\text{Ø}}$$

$$\text{Ø}_{2} = 1 + \text{Ø} = 2 + \frac{1}{\text{Ø}}$$

$$\text{Ø}_{3} = 1 + 2\,\text{Ø} = 3 + \frac{2}{\text{Ø}}$$

$$\text{Ø}_{4} = 2 + 3\,\text{Ø} = 5 + \frac{3}{\text{Ø}}$$

.....

Patru şiruri F verticale se desfăşoară aici unul după altul.

Alt tabel:

$$\text{Ø}_{n} = {}_{1}\text{Ø}^{n}$$
$$= {}_{1}\text{Ø}^{n-1} + {}_{1}\text{Ø}^{n-2}$$
$$= {}_{1}\text{Ø}^{n-2} + 2\text{Ø}^{n-3} + 1\text{Ø}^{n-4}$$

$$= 1 \emptyset^{n-3} + 3\emptyset^{n-4} + 3\emptyset^{n-5} + 1\emptyset^{n-6}$$

$$= 1 \emptyset^{n-4} + 4\emptyset^{n-5} + 6\emptyset^{n-6} + 4\emptyset^{n-7} + 1\emptyset^{n-8}$$

Toate acestea sunt adevărate oricare ar fi n, chiar negativ sau fracţionar.

Mark Barr a observat că coeficienţii puterilor lui $\emptyset$ astfel grupaţi reprezintă triunghiul lui Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

alcătuit prin scrierea mai întâi a unei coloane verticale de unităţi, apoi la dreapta ei a coloanei numerelor întregi şi continuând tabelul astfel încât fiecare număr să fie egal cu suma dintre cel care se găseşte deasupra lui şi cel care se găseşte la stânga acestuia din urmă.

Proprietăţile triunghiului lui Pascal vor fi detaliate în alte capitole; el intervine în geometrie până în spaţiile cu un număr oarecare de dimensiuni, unde ne dezvăluie specificaţiile politopilor sau hipercorpurilor lor regulate, are un rol unic în teoria binomului, în aceea a combinărilor, de care e strâns legată, apare în calculul probabilităţilor şi în curba în formă de clopot a lui Gauss etc.

Aceste pagini sunt o anticipare a capitolului în care vor fi dezvoltate noţiunile de numere reale, algebrice şi transcendente; în capitolul următor ne vom ocupa mai întâi de domeniul, în mod deosebit fecund, inventat de pitagoreici, al Numerelor Figurate în care formele geometrice sunt într-adevăr figurate prin adunări de puncte corespunzând unor numere întregi (am întâlnit deja, combinate, Tetraktys-ul, triunghiul şi Decada).

O să mai semnalez, la sfârşitul acestui capitol, numai unul din rebusurile *diofantine* (exprimate în numere întregi) ale lui Platon, adică „Numărul Nupţial", butadă biologico-astronomică bazată pe prelungirea teoremei pătratului ipotenuzei în trei dimensiuni prin lungimi proporţionale cu 3, 4, 5, 6.

Avem într-adevăr: $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ sau

$216 = 125 + 64 + 27 = 3 \times 72$.

Suma cuburilor construite pe cele trei laturi ale unui triunghi al lui Pythagoras (cu laturile proporţionale cu 3, 4, 5) este egală (ca volum) cu cubul construit pe o dimensiune lineară proporţională cu 6.

Aceasta este, de altfel, marea diagonală a cubului 3, 4, 5.

În această formulă Platon stabileşte în realitate o legătură între un ciclu lunar şi conjuncturile prielnice naşterii. Numărul 72 (unghiul de 72° este opus laturii pentagonului) este unul dintre cele mai importante în cosmologia mitologică şi în astrologie.

CAPITOLUL VI

NUMERELE ŞI FORMELE - NUMERE FIGURATE PLANE ŞI SOLIDE ALE ANTICILOR ŞI ALE LUI DESCARTES - NUMERELE FIGURATE CU n DIMENSIUNI-TRIUNGHIUL, PIRAMIDA ŞI HIPERPIRAMIDA LUI PASCAL

Nu există certitudine acolo unde nu putem aplica nici una dintre ştiinţele matematice şi nici una dintre cele întemeiate pe matematică. (Leonardo DA VINCI)

Am menţionat deja Numerele Figurate şi rolul lor în matematica pitagoreică; ele ilustrează foarte bine corelaţia, deseori uitată de atunci, între Numere şi Forme (sau între Numere şi Idei, după cum spunea Platon, pentru care conceptele de Formă şi Idee fuzionau într-un acelaşi arhetip).

În spaţiul cu două dimensiuni (planul) numerele poligonale corespund unor sume de numere de puncte care reprezintă ele însele formele crescătoare din punct de vedere omotetic (adică prin figuri asemănătoare) ale poligoanelor regulate (planşa V).

Exemplu:

Numerele triunghiulare

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

1, 3, 6, 10, 15, 21,.....

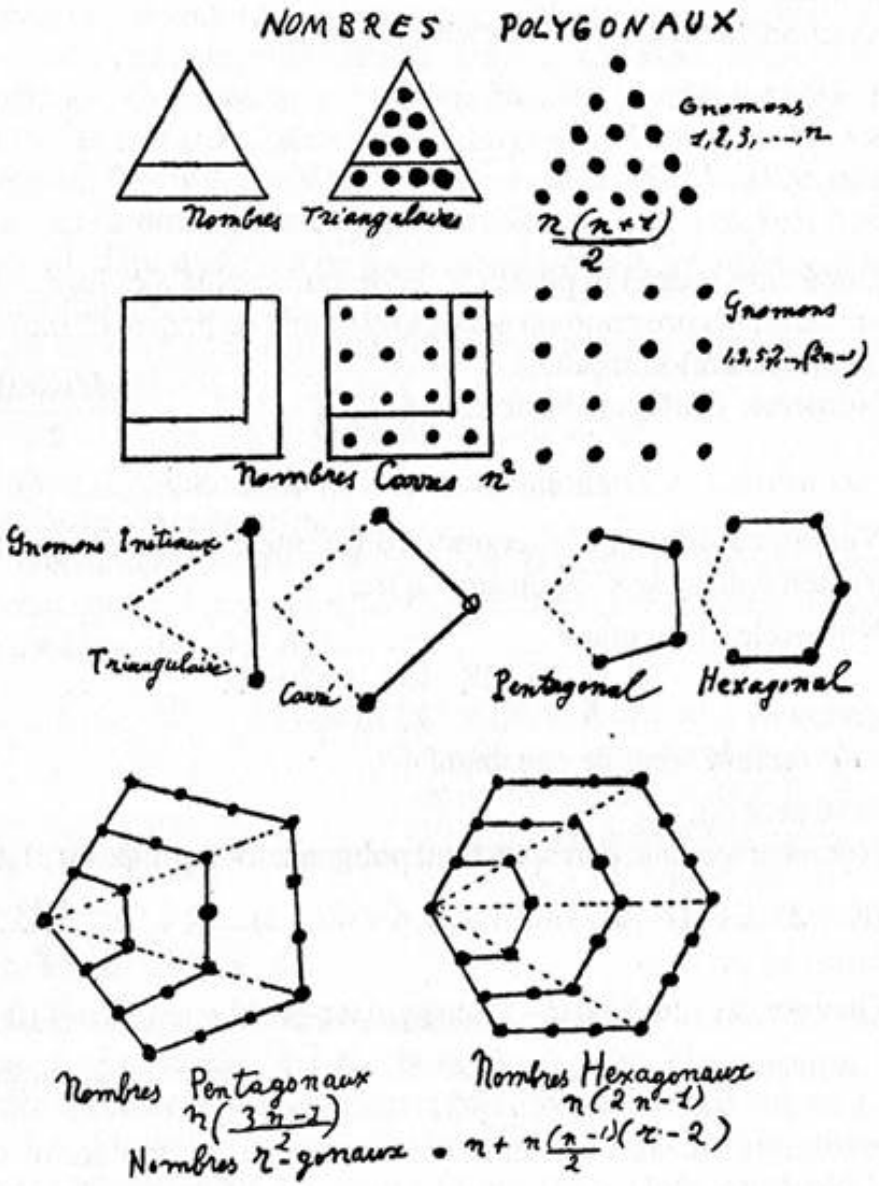
(diferenţele, două câte două ale numerelor consecutive din şir dau şirul numerelor întregi (1, 2, 3, 4, 5... n).

Am mai întâlnit acest şir de numere triunghiulare în coloana a IlI-a verticală a triunghiului lui Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Fiecare număr triunghiular reprezintă şi un triunghi echilateral format dintr-un număr de puncte egal chiar cu acest număr triunghiular; obţinem astfel triunghiul (şi numărul triunghiular) următor adăugând de fiecare dată un rând de puncte în număr egal cu

numerele de puncte de la baza triunghiului precedent plus unu. Numărul de puncte ce trebuie adăugat numărului triunghiular este n + 1, după cum putem vedea în planşă şi în cele două şiruri deja explicitate.



PLANŞA V

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...n

Numerele din şirul inferior (aici şirul numerelor întregi), cele care trebuiau adăugate numerelor corespunzătoare din şirul superior pentru a prelungi nedefinit şirul triunghiular se numeau „gnomoni“ în disciplina pitagoreică a numerelor figurate; noi le numim „diferenţe prime“.

Continuând avem şirul numerelor pătrate:

1, 2^2 ,3^2 ,4^2 ,5^2 ,6^2 n^2

sau

1, 4, 9, 16, 25, 36 n^2

3, 5, 7, 9, 11..... diferenţe prime sau gnomoni.

După cum vedem în planşa V, gnomonii capătă aici forma unui echer pătrat; fiecare gnomon adaugă un număr de puncte ce fac parte din şirul numerelor impare.

Numerele pentagonale sunt 1, 5, 12, 22, 35, ... $\frac{n(3n-1)}{2}$

gnomoni 1, 4, 7, 10, 13, ... 3n-2

Vedem că diferenţele secunde (diferenţele prime ale gnomonilor) sunt constante şi egale aici cu trei.

Numerele hexagonale 1, 6, 15, 28, 45 ... n (2n-l)

gnomoni 1, 5, 9, 13, 17, ... 4n-3

cu diferenţă secundă constantă 4.

Şi în general:

Numere r-gonale, corespunzând poligoanelor regulate cu r laturi,

1 + 0(r-2), 2 + 1(r-2), 3 + 3(r-2),4 + 6(r-2)..., $n + \frac{n(n-1)(n-r)}{1,2}$

Gnomonul celui de-al (n-l)-lea număr r-gonal este

1 + (n-l) (r-2).

Amintim că 1, 3, 6 ..., $\frac{n(n-1)}{2}$ sunt primele (n-l) numere triunghiulare; această prezenţă a numerelor triunghiulare în şirul general al numerelor poligonale provine din faptul că creşterile omotetice ale poligoanelor regulate au ca element fundamental creşterea triunghiulară începând cu un pol de creştere (un vârf oarecare al poligonului), după cum putem constata pe diagramele din planşa V.

De asemenea ne putem închipui creşterea efectuându-se începând din centrul figurii poligonului; numerele hexagonale centrate sunt, de exemplu:

1, 7, 19, 37, 61 91 ... , $1 + \frac{6n(n+1)}{2}$.

Avantajul acestor numere constă în faptul că ele reprezintă şi numerele circumferinţelor tangente egale pe care le putem avea în jurul unei circumferinţe (egală) centrale, socotind circumferinţele interioare. Centrele acestor circumferinţe reprezintă reţeaua de puncte cea mai *izotropă* cu putinţă din plan; ea echivalează, de altfel, cu reţeaua formată de echipartiţiile izotrope din plan ale triunghiurilor echilaterale sau ale hexagoanelor regulate (aceasta rezultă între altele din faptul că raza unei circumferinţe este egală cu o latură a hexagonului regulat înscris).

Să observăm că diferenţele prime ale numerelor hexagonale centrate sunt:

6, 12, 18, 24, 30...

ale căror diferenţe (diferenţe secunde din şirul hexagonal centrat) sunt constante şi egale cu 6.

Să mai notăm că pentru gnomonii şirurilor poligonale normale (necentrate) valoarea constantă a diferenţei secunde este dată de teorema lui Hipsicles $\Delta_r^2 = r - 2$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Am notat deja că cea de-a treia coloană verticală din triunghiul lui Pascal dă şirul de numere triunghiulare prelungit nedefinit; voi mai adăuga aici că acest algoritm[23](triunghiul lui Pascal) extraordinar permite, de asemenea, după cum vom vedea, să se obţină nu numai numerele solide şi hipersolide din şirul triunghi-tetraedru într-un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni; el oferă şi coeficienţii binomului lui Newton (1 + x)n pentru orice valoare a lui n, precum şi numărul de combinări de tipul cel mai general, de m obiecte de n specii diferite (aceasta datorită piramidei şi hiperpiramidelor lui Pascal).

În spaţiul cu trei dimensiuni avem Numerele Figurate solide, sau numere poliedrale, studiate şi ele de pitagoreici şi reluate de Descartes în tratatul *Progymnasmata de Soîidum Elementis* (manuscris găsit la Stockholm după moartea sa); el mai stabileşte şi legea formării gnomonilor pentru poliedrele regulate.

Să mai amintim că, deşi numărul polinoamelor regulate este infinit, cel al poliedrelor regulate se reduce la 5 (corpurile

platoniciene); Descartes, la începutul tratatului menţionat mai sus, face dovada şi calculează specificaţiile:

	Vârfuri	Laturi	Fețe	
Tetraedrul	4	6	4	(triunghiuri echilaterale)
Cubul	8	12	6	(pătrate)
Octaedrul	6	12	8	(triunghiuri echilaterale)
Dodecaedrul	20	30	12	(pentagoane)
Icosaedrul	12	30	20	(triunghiuri echilaterale)

Între numerele vârfurilor, feţelor şi laturilor poliedrelor regulate şi semiregulate (cele 13 corpuri „arhimediene“, şirul prismelor regulate şi cel al antiprismelor regulate, amândouă infinite) avem formula lui Euler:

$$s + f = c + 2$$

Această formulă este un caz particular al formulei lui Schläfli pentru politopurile sau corpurile regulate într-un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni.

Cubul şi octaedrul sunt reciproce (fiecare se poate deriva din celălalt luând ca vârfuri centrele feţelor acestuia din urmă), tetraedrul este „autoreciproc“, se transformă în el însuşi, dodecaedrul şi icosaedrul sunt reciproce.

Pitagoreicii au studiat numerele figurate solide şi legea formării gnomonilor (aceea pe care o redescoperă Descartes):

Numere tetraedrale (sau piramidale) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 ... $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2}$

Numere cubice 1, 8, 27, 64, 125 ... n^3

Numere octaedrale 1, 6, 19, 44, 85 ... $\frac{n(9n^2-9n+2)}{2}$

Numere dodecaedrale 1, 20, 84, 220, 455, ... $\frac{n(5n^2-5n+2)}{2}$

Numere icosaedrale 1, 12, 48, 124, 255, ...

Nu ne vom mira constatând că a patra coloană verticală din triunghiul lui Pascal ne dă şirul numerelor tetraedrale sau piramidale 1, 4, 10, 20, 35, 56 ,84 ; acest lucru este adevărat pentru un spaţiu cu

un număr oarecare de dimensiuni: coloana a V-a ne dă numerele pentaedroidale sau hiperpiramidale într-un spaţiu cu patru dimensiuni, 1, 5, 15, 35, 70, 126 ş.a.m.d. pentru orice număr de dimensiuni; coloana n + 1 ne dă şirul numerelor care corespund şirului triunghiular într-un spaţiu cu n dimensiuni.

Al n-lea număr triunghiular este $\frac{n(n+1)}{2}$

Al n-lea număr piramidal (3 dimensiuni) este $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

Al n-lea număr hiperpiramidal în 4 dimensiuni este

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$

Al n-lea număr hiperpiramidal în K dimensiuni este

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{k!}$$

Şi mai remarcabil este faptul că acelaşi triunghi al lui Pascal ne dă şi specificaţiile, adică numerele vârfurilor, laturilor, feţelor, volumelor, celulelor etc. ale politopurilor regulate din şirul triunghi, tetraedru etc., într-un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni. Specificaţiile pentru spaţiul cu n dimensiuni ne sunt date aici de al n + 2-lea rând orizontal. Al patrulea rând ne dă, de exemplu, specificaţiile triunghiului, 3 vârfuri şi trei laturi (în două dimensiuni), al cincilea rând ne dă specificaţiile tetraedrului, 4 vârfuri, 6 laturi, 4 feţe (în 3 dimensiuni), al şaselea rând ne dă specificaţiile pentahedroidului (hiperpiramidă sau hipertetraedru cu 4 dimensiuni), şi acest lucru rămâne valabil pentru un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni. Vom vedea că, în această ordine de idei, este mai logic să desfiinţezi coloana întâi, cea numai cu 1:

1
2 1
3 3 1
4 6 4 1
5 10 10 5 1

6 15 20 15 6 1

În acest caz, cifrele 1 de la sfârşitul fiecărui rând reprezintă suprafaţa, volumul sau hipervolumul, politopul însuşi[24]. Coloana numerelor 1 fiind astfel desfiinţată în triunghiul lui Pascal, şirul numerelor triunghiulare prelungite într-un spaţiu cu n dimensiuni va fi dat de o a n-a coloană (de exemplu 1, 4, 10, 20... pentru numerele tetraedrice cu trei dimensiuni; tot astfel specificaţiile corpurilor şi hipercorpurilor din formaţia triunghiulară într-un spaţiu cu n dimensiuni sunt date de al n + 1-lea rând orizontal (al patrulea rând 4, 6, 4, 1 dă specificaţiile tetraedrului, trei dimensiuni).

Al n-lea număr hiperpiramidal cu k dimensiuni este

$$\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}$$

şi al (n - k + l)-lea număr hiperpiramidal cu k dimensiuni este

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Vom regăsi triunghiul lui Pascal când vom studia hipercorpurile cu n dimensiuni şi combinările.

Să ne întoarcem pe pământ, adică Ia numerele poliedrale. Descartes a stabilit pentru cele cinci şiruri de numere poliedrale regulate legi de formare logice.

Numere

Tetraedrale		Cuburi	
$1-0+0$	$+\ 0=\ 1$	$1^2\times3-1\times3+1$	$+\ 0=\ 1$
$3-0+0$	$+\ 1=\ 4$	$2^2\times3-2\times3+1$	$+\ 1=\ 8$
$6-0+0$	$+\ 4=10$	$3^2\times3-3\times3+1$	$+\ 8=27$
$10-0+0$	$+10=20$	$4^2\times3-4\times3+1$	$+27=64$
$15-0+0$	$+20=35$		

Octaedrale

$$
\begin{array}{r|l}
1\times 2^2 - 1\times 2^2 + 1 & +\ 0 = \ 1 \\
3\times 2^2 - 2\times 2^2 + 1 & +\ 1 = \ 6 \\
6\times 2^2 - 3\times 2^2 + 1 & +\ 6 = 19 \\
10\times 2^2 - 4\times 2^2 + 1 & +19 = 44
\end{array}
$$

Icosaedrale

$$
\begin{array}{r|l}
15\times\ 1 - 1\times 20 + \ 6 & +\ 0 = \ 1 \\
15\times\ 3 - 2\times 20 + \ 6 & +\ 1 = 12 \\
15\times\ 6 - 3\times 20 + \ 6 & +12 = 48 \\
15\times 10 - 4\times 20 + 10 & +48 = 124
\end{array}
$$

Dodecaedrale

$$
\begin{array}{r|l}
1\times 3^3 - 2\times 3^2 + 10 & +\ 0 = \ \ 1 \\
5\times 3^2 - 4\times 3^2 + 10 & +\ 1 = \ 20 \\
12\times 3^2 - 6\times 3^2 + 10 & +20 = \ 84 \\
22\times 3^2 - 8\times 3^2 + 10 & +84 = 220
\end{array}
$$

Descartes deduce de aici expresiile generale pentru al n-lea gnomon din fiecare serie. Al n-lea gnomon va fi:

Pentru numerele tetraedrale ... $\frac{n(n+1)}{2}$

Pentru numerele cuburi ... $3n^2 - 3n + 1$

Pentru numerele octaedrale ... $2n^2 - 2n + 1$

Pentru numerele icosaedrale ... $15n^2 - 25n + 12$

Pentru numerele dodecaedrale ... $\frac{27n^2-45n+20}{2}$

Am dat aici penultimul tabel (cel al lui Descartes), pentru a arăta cât de subtile şi greu de obţinut erau analizele făcute de el acestor şiruri de numere poliedrale.

În şirurile tetraedrale, octaedrale şi icosaedrale vedem apărând şirul vertical al numerelor triunghiulare (1, 3, 6, 10, 15 ...); dimpotrivă, în şirul dodecaedral apare şirul vertical pentagonal 1, 5, 12, 22, 35 ...; în şirul cubic apar cel al pătratelor şi cel al numerelor întregi, care apar, de altfel, şi în tabloul formării numerelor octaedrale şi icosaedrale.

Să remarcăm că gnomonii şirului tetraedric

1, 4, 10, 20, 35 ... $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

nu sunt alţii decât şirul triunghiular

1, 3, 6, 10, 15, ... $\frac{n(n+1)}{2}$

Să mai remarcăm că şirul dodecaedral

1, 20, 84, 220, 455 ... $n(9n^2-9n+2)$

se poate forma din cel al numerelor pentagonale înmulţind termenii acestuia din urmă (1, 5, 22, 35, 51 ...) cu termenii corespunzători din şirul gnomonilor săi sau al diferenţelor sale prime 1, 4, 9, 10, 13,16 ...Într-adevăr, împreună cu reciprocul său, icosaedrul, dodecaedrul este dezvoltarea pentagonului în spaţiul cu 3 dimensiuni.

Prezenţa şirului triunghiular în legile de formare a aproape tuturor şirurilor crescătoare provine, după cum a fost deja semnalat, din faptul că aceste creşteri se fac prin triunghiuri ieşite dintr-un pol de creştere (planşa V); această „înmugurire" triunghiulară continuă în spaţiile cu un număr oarecare de dimensiuni.

În spaţiul cu trei dimensiuni putem considera şi numere poliedrice centrate, adică a căror creştere se dezvoltă începând din centru şi figură şi nu dintr-un vârf.

Şi poliedrele semiregulate arhimedice se pretează la creşterea gnomonică reprezentată prin numere figurate. De exemplu, pentru

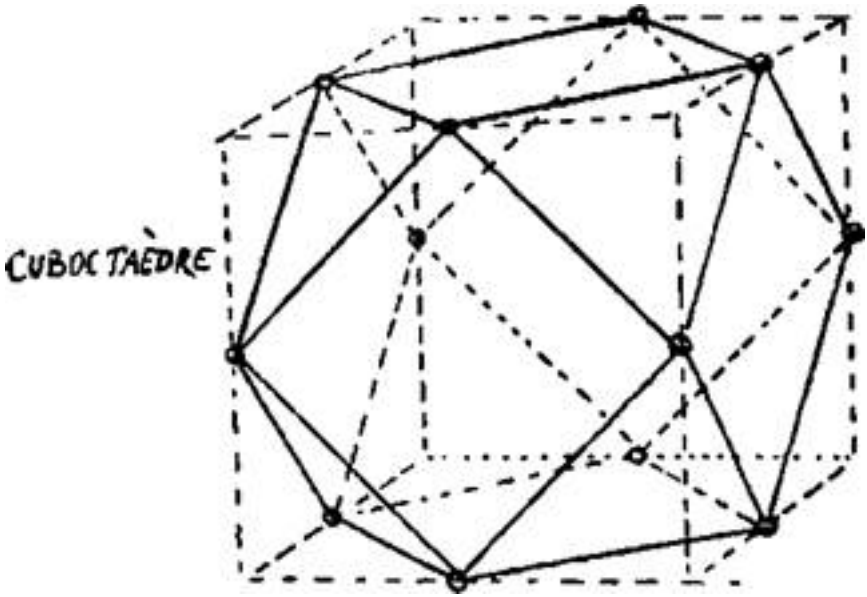
cuboctaedru (fig. 1, planşa VI), corp semiregulat, ce poate fi înscris într-o sferă asemeni poliedrelor regulate, ale cărui vârfuri sunt mijloacele muchiilor fie ale cubului, fie ale octaedrului şi care joacă un rol capital în cristalografie; acest solid are 12 vârfuri, 24 de muchii egale, 14 feţe, din care 8 sunt triunghiuri echilaterale şi 6 pătrate. Pentru împrospătarea memoriei, am să dau „şirul numerelor cuboctaedrice centrate", adică reprezentând creşterea nedefinită a unui cuboctaedru plecând de la centrul său (şi nu dintr-un vârf ca în cazul numerelor figurate normale). Aceste numere corespund în spaţiu numerelor hexagonale centrate din plan. Aşa cum acestea din urmă reprezentau şi umplerea planului printr-o îmbinare uniformă de cercuri tangente între ele, tot aşa numerele cuboctaedrice centrate reprezintă umplerea spaţiului cu o îmbinare izotropă de sfere egale tangente: o sferă drept centru, apoi douăsprezece sfere egale tangente cu prima etc.; punctele de tangenţă corespund cu vârfurile unui cuboctaedru, iar creşterea se efectuează în straturi concentrice de sfere în număr egal cu gnomonii numerelor cuboctaedrice centrate. Aceasta (reţeaua punctelor de tangenţă sau reţeaua asemănătoarea centrelor sferelor) reprezintă reţeaua de puncte cea mai izotropă (egală cu ea însăşi în fiecare punct) din spaţiu, această proprietate rezultând din faptul că muchia cuboctaedrului este egală cu raza sferei circumscrise, proprietate corespunzând în plan aceleia a hexagonului regulat (latura lui este egală cu raza cercului circumscris)[25].

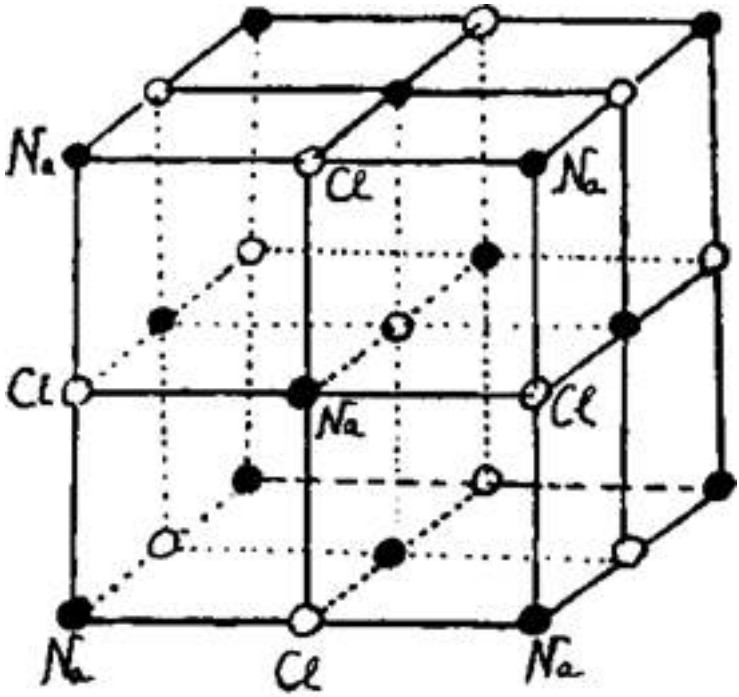
Înţelegem cu uşurinţă importanţa a acestei reţele perfecte în cristalografie; sarea (NaCl) în special, dar şi aurul, argintul, arama şi aluminiul îşi dispun de cele mai multe ori atomii după această reţea cuboctaedrică (fig .2 planşa VI).

Trebuie să menţionez acest amănunt, paradoxal în aparenţă: cu toate că în esenţă sistemul cuboctaedric care corespunde celui al sferelor egale tangente alcătuieşte reţeaua de puncte cea mai izotropă cu putinţă, o îmbinare de cuboctaedre nu poate umple spaţiul fără interstiţii, nu oferă o echipartiţie.

Dimpotrivă, putem umple complet spaţiul cu n cuboctaedre şi *n* octaedre având aceeaşi muchie sau cu n octaedre şi *2n* tetraedre. Sau cu o îmbinare compactă de ceea ce am numit sabots (corp compus dintr-un semioctaedru şi un tetraedru regulat alăturate).

Alt amănunt neaşteptat: în vreme ce în plan se poate înfăptui echipartiţia planului printr-o îmbinare de triunghiuri echilaterale (este, de altfel, un subgrup al echipartiţiei prin hexagoane regulate, fiecare dintre acestea putând fi împărţit în 6 triunghiuri), în spaţiu o echipartiţie prin tetraedre regulate nu există.





CRISTAL DE SEL

PLANŞA VI

Dacă într-adevăr ne închipuim în spaţiu un sistem de plane paralele cu feţele unui tetraedru regulat, obţinem o reţea de puncte perfect izotropă, identică de altfel cu reţeaua cuboctaedrică a centrelor sferelor tangente, dar nicidecum echipartiţia prin volume

egale[26].

Aceste probleme de echipartiţii ale planului şi ale spaţiului apar îndeobşte în cristalografie şi în teoria grupurilor de simetrie, ca şi în arta decorativă.

În cristalografie, de pildă, există 17 diviziuni regulate şi semiregulate ale planului, 17 feluri de a grupa motive regulate, repetate într-un plan (este aceeaşi problemă), 17 tipuri de simetrie plană.

După toate aceste digresiuni poate că a sosit timpul să prezentăm numerele cuboctaedrice centrate; ele formează şirul

$$1, 33, 55, 147, 309, 561, 923 \ldots \; 1 + \frac{(n-1)(10n^2-5n+6)}{3}$$

Gnomonii sau diferenţele prime sunt 12, 42, 92, 162, 252, 362 ...

Diferenţele secunde sunt 30, 50,70,90,110 ... cu diferenţe de rangul trei constante 20, 20, 20,20 ...

Să remarcăm că al treilea gnomon, 92, care reprezintă şi numărul de sfere tangente în al treilea strat concentric al îmbinării de sfere tangente egale în jurul unei sfere centrale, coincide cu numărul de electroni exteriori care se rotesc în jurul nucleului din atomul ultimului element natural (uraniu) din tabelul periodic al lui Mendeleev.

Planşa VII înfăţişează două diagrame privitoare la sistemul cuboctaedric însuşi, îmbinarea a şapte cercuri egale, tangente, centrul de creştere a numerelor hexagonale centrate şi al reţelei hexagonale în plan şi îmbinarea a 13 sfere egale, tangente (centrele coincizând cu vârfurile şi cu centrul unui cuboctaedru), centru de creştere a numerelor cuboctaedrice centrate.

Cititorul a putut remarca o anumită analogie între proprietăţile gnomonilor, sau diferenţele prime ale numerelor figurate, şi cele ale diferenţialelor din calculul diferenţial propriu-zis. De fapt, teoria pitagoreică a numerelor figurate şi a creşterilor lor (gnomonii sau diferenţe prime) poate fi legată de calculul modem al diferenţelor întregi, folosit în construirea anumitor maşini de calculat şi, prin aceasta, de calculul diferenţial.

Similitudinea cea mai evidentă este aceea că, aşa cum în analiză derivata sau diferenţiala de ordinul n a unei funcţii de gradul n este o constantă şi derivata de ordinul n + 1 este egală cu zero, tot aşa în geometria gnomonică şirul diferenţelor de ordinul n dintr-un şir cu creştere gnomonică crescătoare de numere solide cu n dimensiuni este un şir de numere egale, iar diferenţele de ordinul n + 1 sunt egale cu zero.

De exemplu:

Numere dodecaedrale
(cu trei dimensiuni)

	1	20	84	220	455	816
Δ1 (gnomoni)	19	64	136	235	361	
Δ2	45	72	99	126		
Δ3	27	27	27			
Δ4	0	0				

Numere icosaedrale

1	12	48	124	255	456
Δ1	11	36	76	131	201
Δ2	25	40	55	70	
Δ3	15	15	15		
Δ4	0	0			

Dimpotrivă, prin numerele pentagonale (cu două dimensiuni) avem:

1	5	12	12	35	51
Δ1	4	7	10	13	16
Δ2	3	3	3	3	
Δ3	0	0	0		

Domeniul numerelor figurate se întinde, după cum s-a lăsat deja să se înţeleagă, la spaţiile cu un număr oarecare de dimensiuni. Am semnalat faptul că triunghiul lui Pascal ne oferea, fără nici o altă manipulare, specificaţiile hipersolidelor regulate din şirul triunghiular într-un spaţiu cu patru sau cu n dimensiuni.

Al treilea rând orizontal din triunghiul lui Pascal modificat prin desfiinţarea coloanei ce conţine doar 1

1
2 1
3 3 1
4 6 4 1
5 10 10 5 1
6 15 20 15 6 1

reprezintă specificaţiile triunghiului echilateral (spaţiul cu două dimensiuni), adică 3 vârfuri (cu 0 dimensiuni), trei laturi (cu 0 dimensiune), un triunghi (cu două dimensiuni).

Al patrulea rând 4,6,4,1 reprezintă tot specificaţiile tetraedrului

regulat (spaţiul cu trei dimensiuni: 4 vârfuri, 6 laturi, 4 feţe un volum), al cincilea rând 5,10,10,5,1 specificaţiile hiperpiramidei sau pentahedroidului regulat în spaţiul cu patru dimensiuni (5 vârfuri, 10 laturi, 10 feţe triunghiulare, 5 tetraedre „frontiere", un hipervolum) ş. a. m. d. Nu poate părea decât un joc al spiritului, pentru cei care nu cred în realitatea sau chiar în posibilitatea existenţei logice a acestor hipersolide. De fapt, existenţa lor logică este tot atât de riguros dovedită ca şi aceea a solidelor în geometria uzuală, cu trei dimensiuni, iar specificaţiile date de triunghiul lui Pascal pentru hipersolidele din şirul triunghiular în hiperspaţii permit (după cum vom vedea într-un alt capitol) să se conceapă logic în toate detaliile lor şi să se proiecteze în spaţiul nostru hiperpiramide cu 4 sau n dimensiuni şi chiar să se construiască o hiperpiramidă ale lui Pascal (cu 4 dimensiuni) care, la rândul ei, permite să se rezolve anumite probleme de combinări şi să se ajungă progresiv la hiperpiramide ale lui Pascal cu un număr oarecare de dimensiuni şi la problemele respective de combinări.

Această geometrie cu 4 sau n dimensiuni pe care mulţi o cred neîndoielnic pur imaginară, dacă nu absurdă, se supune aşadar unor reguli tot atât de precise ca geometria obişnuită; este stabilit, de exemplu, că tot aşa cum în spaţiul obişnuit cu trei dimensiuni nu pot exista decât 5 corpuri solide regulate, în spaţiul cu 4 dimensiuni avem 6 hipersolide regulate care au ca „volume-frontieră“ poliedre regulate. Acestea sunt:

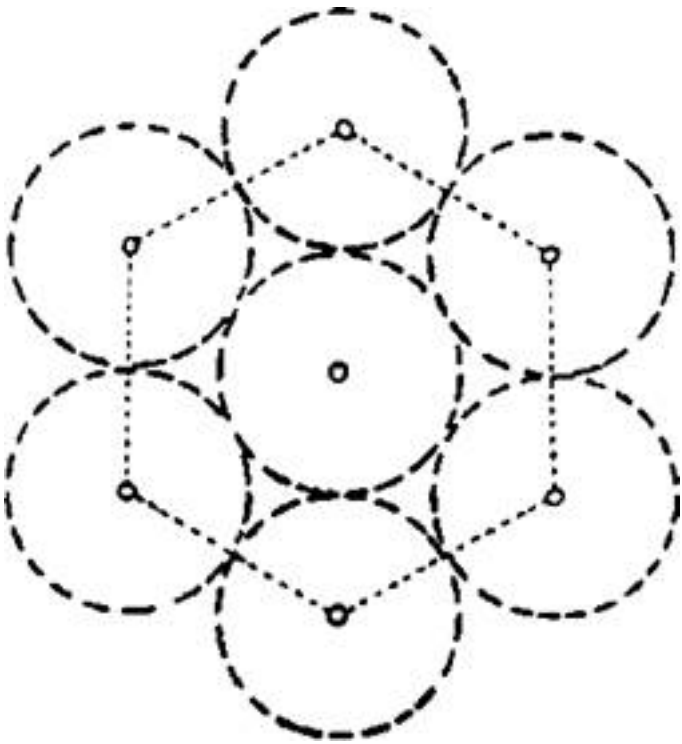
	Vârfuri	Muchii	Fețe	Celule-frontieră	Simboluri
Pentaedroidul sau Hiperpiramida	5	10	10 triunghiuri	5 tetraedre	C_5
Octaedroidul sau Hipercubul	16	32	24 pătrate	8 cuburi	C_8
Hexadecaedroidul	8	24	32 triunghiuri	16 tetraedre	C_{16}
Icosatetraedroidul	24	96	96 triunghiuri	24 octaedre	C_{24}
Hecatonicosaedroidul	600	1200	720 pentagoane	120 dodecaedre	C_{120}
Hecatosiedroidul	12	720	120 triunghiuri	600 tetraedre	C_{600}

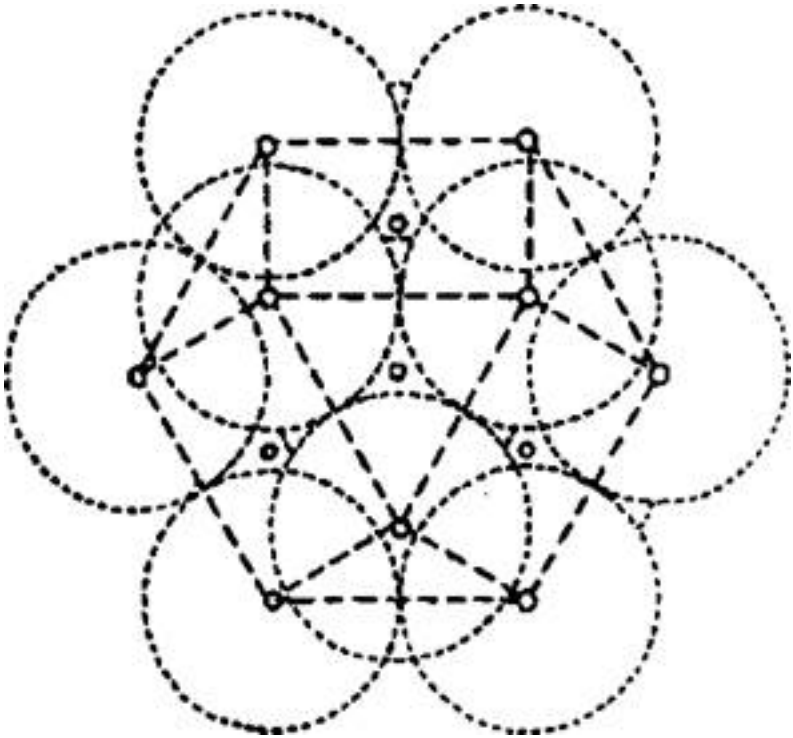
Pentaedroidul nu are nici o legătură cu pentagonul; are 5 celule-frontieră care sunt tetraedre şi aparţine şirului triunghiular; octaedroidul n-are legătură directă cu octaedrul, însă are 8 cuburi ca celule-frontieră; acesta este numărul de celule-frontieră care apare în această terminologie şi în simbolurile C_5, C_8 etc.

Face parte din familia pătratului şi a cubului pe care-l reprezintă

în cea de-a IV-a dimensiune. C_{16} corespunde şirului octaedrelor; C_{24} este un individualist, nu-şi găseşte locul în nici o filiaţie directă în ciuda afinităţii sale cu şirul triunghiular; C_{120} este reprezentantul seriei pentagon-dodecaedru în spaţiul cu 4 dimensiuni, în sfârşit reprezintă ramura pentagon-icosaedru în spaţiul cu 4 dimensiuni.

Ne-am fi putut aştepta ca aceste 4 şiruri începute de perechile triunghi-tetraedru, pătrat-cub, pătrat-octaedru, pentagon-dodecaedru (chiar pentagon-icosaedru) să continue nedefinit, prin spaţiile superioare, având reprezentanţi în spaţiile cu 5, 6, ... n dimensiuni; însă aici are loc o oprire misterioasă: şirurile care încep cu tetraedrul, cubul şi octaedrul continuă nedefinit în cea de-a V-a dimensiune şi dincolo, însă şirul pentagon-dodecaedru (sau icosaedru) se opreşte brusc şi nu mai apare în a V-a dimensiune, nici mai departe. Nu am văzut nicăieri vreo dovadă riguroasă a acestei afirmaţii, dar sunt de acord cu François Warrain şi Donchian, cel mai mare specialist în spaţiile cu 4 şi mai multe dimensiuni, care a înfăţişat la expoziţia din Chicago modele din fire de aramă nu numai ale proiecţiilor în spaţiul nostru al celor 6 politopi regulaţi specificaţi mai sus, ci şi modele ale proiecţiilor în spaţiul nostru ale hipercorpurilor din şirul cub - hipercub etc., care există în toate spaţiile având între 4 şi 24 de dimensiuni.





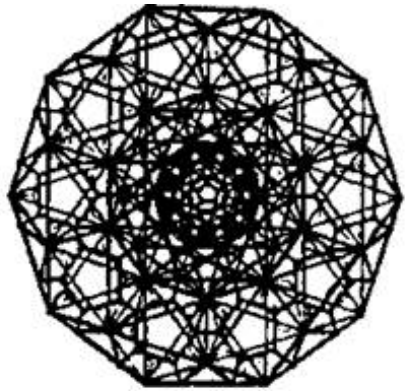
PLANŞA VII

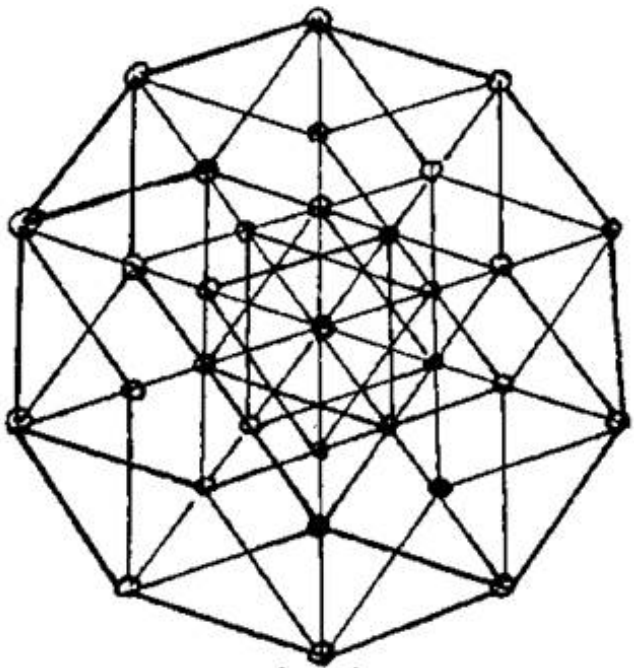
În Palais de la Decouverte sunt expuse şi două modele din fire metalice ale proiecţiilor lui C_{120} şi C_{600}. C_{120} este ultimul reprezentant oficial al pentagonului şi al Secţiunii de Aur în spaţiile multidimensionale, dat fiind că această familie se stinge după a IV-a dimensiune; dau aici (fig. 1, planşa VIII) o proiecţie octogonală simetrică în plan a lui C_{120}, în care pentagonul, Secţiunea de Aur şi decagonul se întrepătrund într-o rozetă cu desăvârşire euritmică. Dar, amănunt ciudat, cu toate că Secţiunea de Aur şi pentagonul sau decagonul nu există în mod concret în politopii spaţiilor cu mai mult de 4 dimensiuni, ei se găsesc, în mod paradoxal, în anumite proiecţii ale acestor politopi în spaţiul nostru sau în plan. De exemplu, figura 2, planşa VIII, rozetă acordată riguros cu Secţiunea de Aur într-o structură decagonală, reprezintă totodată o proiecţie plană a hipercubului cu 5 dimensiuni şi o faţă a proiecţiei în trei dimensiuni a hipercubului cu 14 dimensiuni[27][5]. Faptul că matematicianul sau mai degrabă geometrul care „vede în spaţiu“[28] îşi poate închipui, poate vedea în imaginaţie aceste hipercorpuri sau cel puţin proiecţiilor lor, cititorului lipsit de antrenament îi pare mai mult decât ciudat; în parte este într-adevăr o chestiune de antrenament. în Statele Unite, arhitectul Claude Bragdon se folosea în mod practic de aceste

proiecţii de politopi în 3 sau 2 dimensiuni pentru motive de covoare sau de lămpi în formă de stea. (în afară de cei 6 politopi regulaţi, există într-adevăr în spaţiul cu 4 dimensiuni 10 politopi regulaţi în formă de stea care corespund celor două dodecaedre în formă de stea din spaţiul nostru.)

Drept corespondent al triunghiului lui Pascal, care ne îngăduie (după cum am văzut) să stabilim specificaţiile şirului triunghiular de forme (triunghi, tetraedru, hiperpiramidă...) într-un spaţiu cu un număr oarecare de dimensiuni, am alcătuit un tabel triunghiular care ne permite să stabilim o lege limpede de formare a hipercorpurilor din şirul pătrat, cub, hipercub etc., pentru un număr oarecare de dimensiuni. Acest tabel (tabelul I) arată, de asemenea, prezenţa universală a şirului triunghiular; coloanele verticale din triunghiul lui Pascal sunt, ca să zicem aşa, perechi ale coloanelor puterilor succesive ale lui 2, reprezentând principiul Diadei.

În spaţiul cu trei dimensiuni specificaţiile cubului sunt date de cifrele 6 (feţe), 12 (laturi), 8 (vârfuri), din rândul al III-lea; în spaţiul cu 4 dimensiuni rândul al IV-lea ne dă 8 celule (cuburi), 24 de feţe (pătrate), 32 (laturi), 16 (vârfuri). Prima cifră, 1, reprezintă chiar hipercubul.





Projection de l' Hypercube à 5 dimensions

PLANŞA VIII

Tabelul I. — Seria nedefinită de hipercuburi

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 1 = 2$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 2 = 4$ $\quad 2^2 \times 1 = 4$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 3 = 6$ $\quad 2^2 \times 3 = 12$ $\quad 2^3 \times 1 = 8$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 4 = 8$ $\quad 2^2 \times 6 = 24$ $\quad 2^3 \times 4 = 32$ $\quad 2^4 \times 1 = 16$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 5 = 10$ $\quad 2^2 \times 10 = 40$ $\quad 2^3 \times 10 = 80$ $\quad 2^4 \times 5 = 80$ $\quad 2^5 \times 1 = 32$

$2^0 = 1$ $\quad 2^1 \times 6 = 12$ $\quad 2^2 \times 15 = 60$ $\quad 2^3 \times 20 = 160$ $\quad 2^4 \times 15 = 246$ $\quad 2^5 \times 6 = 192$ $\quad 2^6 \times 1 = 64$

. . . . . .

$$1, \frac{2n}{1}, \frac{2^2 n(n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{2^3 n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{2^4 n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots\ldots 2^n \times 1$$

Al $\overline{K+1}$-lea termen de rangul $\overline{N+1}$, dă 2^k multiplicat cu factorul $(n-k+1)$. număr hiperpiramidal.

$$\frac{2^k \cdot n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

Tabelul II. — Specificaţii ale seriei nedefinite de hiperoctaedre

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^2 = 4$ $\quad 2^1 \times 2 = 4$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^3 = 8$ $\quad 2^2 \times 3 = 12$ $\quad 2^1 \times 3 = 6$ $\quad 2^3 \times 1 = 1$

$2^4 = 16$ $\quad 2^3 \times 4 = 32$ $\quad 2^2 \times 6 = 24$ $\quad 2^1 \times 4 = 8$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^5 = 32$ $\quad 2^4 \times 5 = 80$ $\quad 2^3 \times 10 = 80$ $\quad 2^2 \times 10 = 40$ $\quad 2^1 \times 5 = 10$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

$2^6 = 64$ $\quad 2^5 \times 6 = 192$ $\quad 2^4 \times 15 = 240$ $\quad 2^3 \times 20 = 160$ $\quad 2^2 \times 15 = 60$ $\quad 2^1 \times 6 = 12$ $\quad 2^0 \times 1 = 1$

. . . . . .

$$2^n, 2^{n-1} \cdot \frac{n}{1}, 2^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, 2^{n-3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \ldots\ldots 2^{n-k} \cdot \frac{n(n-1)(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}, 2n, 1$$

Tabelul II dă specificaţiile hiperoctaedrelor într-un spaţiu oarecare. Cifrele sunt aceleaşi ca în tabelul I, însă inversate simetric; hipercuburile şi hiperoctaedrele rămân reciproce în oricare spaţiu, la fel cubul şi octaedrul. Aceste trei tabele, triunghiul lui Pascal şi tabelele I şi II, dau, aşadar, specificaţiile tuturor corpurilor regulate posibile în oricare spaţiu. (Este vorba, pentru moment, de spaţii euclidiene.)

Formula lui Schläfli pentru spaţiul cu 4 dimensiuni este:

$$v - f + c - s = 0 \text{ sau } v + c = f + s$$

literele v, f, c, s semnifică numărul de volume (celule-frontieră tridimensionale), feţe, laturi, vârfuri ale fiecărui politop.

Formula lui Schläfli:

$$\sum (k = 0, 1, 2, \ldots n)(-1)^k x A k = 1$$

se aplică în tabelele I şi II (hipercuburi şi hipertetraedre); atunci unitatea din stânga din fiecare rând din tabelul I reprezintă chiar politopul; pentru hiperoctaedre (tabelul II) politopul îl reprezintă 2° x 1 din diagonala din dreapta.

Într-un spaţiu cu n dimensiuni hiperpiramida având ca specificaţii

$$1, \frac{n}{1}, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots, \frac{2^k n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

specificaţiile corespunzătoare ale hipercubului şi ale hiperoctaedrului vor fi:

$$2^0, 2^1\frac{n}{1}, 2^2\frac{n(n\quad 1)}{1.2}, \ldots\ 2^k\frac{n(n\quad 1)\ldots(n\quad k\ +\ 1)}{k!}, \ldots\ 2^{n-1}\frac{n}{1}2^n$$

şi

$$2^n, 2^{n-1}\frac{n}{1}, 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}, \ldots\ 2^1\frac{n}{1}, 2^0 = 1$$

Ultimele două formule vor fi reciproce.

Să remarcăm că octaedrul s-a format din pătrat şi nu din triunghi; două vârfuri se adaugă fiecărui spaţiu pentru a obţine hiperoctaedrul spaţiului superior.

La originea poligoanelor regulate şi a dezvoltării lor prin spaţiile succesive se găseşte, atât pentru triunghi, cât şi pentru pătrat, o figură alcătuită din două puncte, un „bipol“ format din două puncte şi din linia care le uneşte (bipolul figurează în partea de sus a fiecărui tabel). În realitate, celula primordială, „protozoarul“ geometric, în spaţiul cu 0 dimensiuni, este punctul 1 care umple acest spaţiu. Aceste prime două elemente se găsesc şi în şirul crescător cu circumferinţă, sferă etc., numai că în acest caz „sfera“ cu o dimensiune este formată dintre două puncte *neunite* printr-o linie.

Pentru a trece de la „bipol“ la corpul următor din şirul „triunghiular“, este suficient să adăugăm un al treilea pol exterior „spaţiului“ cu o dimensiune şi depărtat de fiecare din cele două puncte ale bipolului cu o lungime egală cu aceea a segmentului care le uneşte. Această construcţie repetată căreia i se adaugă de fiecare dată un punct de ordinul (n + 1) sau pol situat în afara spaţiului precedent, dă şirul infinit al hiperpiramidelor.

Dimpotrivă, şirul hipercuburilor se obţine ducând de fiecare dată corpul ce corespunde spaţiului cu 1, 2, 3 ... n dimensiuni (bipol, pătrat, hipercub = octahedroid[29])... într-o direcţie perpendiculară pe toate dimensiunile spaţiului său (introducând astfel a n + 1

dimensiune) cu o distanţă egală cu lungimea segmentului iniţial (al muchiei constante); obţinem astfel noul corp sau hipercorp unind vârfurile corespunzătoare ale celui precedent înainte şi după translaţia sa. (A se vedea mai departe planşa XIII, capitolul XI.) Pentru hiperoctaedru, legea de formare constă în a adăuga două vârfuri corpului precedent, aceste două vârfuri fiind situate pe o perpendiculară dusă în spaţiul precedent prin centrul figurii corpului şi simetric de o parte şi de alta a acestui corp astfel încât să alcătuiască, după ce au fost unite cu toate vârfurile acestuia din urmă, noi muchii egale cu precedentele.

Am văzut că în spaţiul cu 0 dimensiuni, punctul este monada geometrică, polul, oul absolut din care decurg nu numai numerele, ci şi formele reprezentate de Numerele Figurate.

Vom vedea într-un alt capitol că teoria acestor Numere Figurate imaginată de pitagoreici permite nu numai aceste plonjări în hiperspaţiu, ci şi rezolvarea logică şi „în mod figurativ" a numeroase probleme din teoria combinărilor.

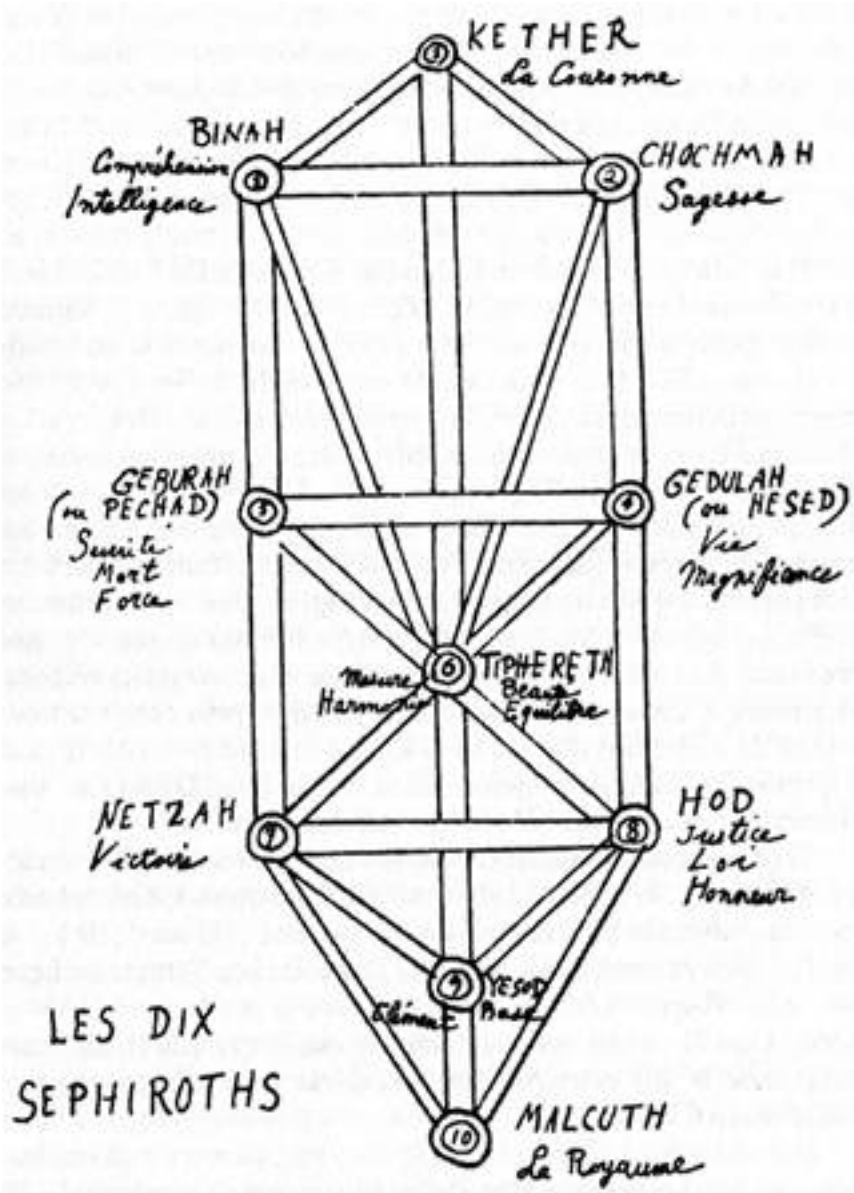
CAPITOLUL VII

CABALA ŞI NUMERELE-INFLUENŢA PITAGORISMULUI ASUPRA GÂNDIRII CREŞTINE ŞI EBRAICE-CABALĂ, GNOZĂ ŞI MAGIE-PENTACLURI, FAUST, AGRIPPA ŞI PARACELSUS

Moartea este o sărutare de la Dumnezeu.
(ZOHARUL)

În religia vechiului Egipt şi în magia rituală, care îi era asociată, era atribuită o virtute magică nu atât numerelor, cât cuvintelor; am vorbit despre aceste „cuvinte încărcate de puteri" (cuvinte de trecere (parole n.trad.), cuvinte talisman, cuvinte de vrajă, cuvinte care ucid) în cartea mea *Numărul de Aur*. Dimpotrivă, în Biblie şi în tradiţia ebraică, în Caldeea, mistica numerelor o domină pe aceea a cuvintelor, iar numerele Şapte (cele şapte zile ale Creaţiei, cele şapte plăgi ale Egiptului, cele şapte vaci slabe, cele şapte braţe ale sfeşnicului ritual), Zece (tablele Legii) şi Doisprezece (cele douăsprezece triburi etc.) au atribute mistice asemănătoare celor ale numerelor divine pitagoreice, numai că aici este vorba mai degrabă de veneraţie sau de teamă superstiţioasă decât de contemplaţie metafizică, de evocare de arhetipuri. Însemnătatea acordată de Biblie anumitor numere se pare că este datorată influenţei caldeene primitive, apoi celei a captivităţii babiloniene. Dar în afara acestor influenţe şi contagiuni fireşti, gândirea evreiască, în epoca alexandrină a reînnoirii pitagoreice (cuprinzând cele şase veacuri care încadrează simetric începutul erei noastre), a fost puternic înrâurită de magia egipteană a cuvintelor pe de o parte, de mistica pitagoreică a numerelor pe de alta, şi a alcătuit „corpusul" compact de mistică a cuvintelor, a literelor şi a numerelor, amestec de ştiinţă, de magie şi de numerologie superstiţioasă care este Cabala ebraică. Cuvântul Quabalah înseamnă totodată receptare şi transmitere (*Şalşelet ha-kabala*, „lanţul Tradiţiei"); dată fiind puternica influenţă pitagoreică pe care tocmai am arătat-o nu vom fi miraţi dacă vom întâlni în simbolurile principale ale Cabalei un Tetraktys stabilit pe literele numelui Dumnezeului Incomunicabil (Tetragrama, silabisită *Jod He Vau He*, transformat uneori, sub influenţa gnostică în Pentagrammaton Jod He Shin Vau He, *Jehoshuah* pentru Iisus) şi o Decadă, Decada Sefirotică, lanţ sau arbore al sefiroţilor, sau „Noţiuni ale lui Dumnezeu prin Numere", care pe calea celor 72 nume divine alcătuite cu cele 22 de „litere-căi" şi cele 50 de porţi (Sefiroţi sau Decada multiplicată cu Cinci) ne fac să trecem prin „Schemoths" (cunoaşteri prin nume) de la „Schema" (Numele Incomuni- cabil) la Schema Hamphorarsh, numele

explicat de En-Sof, bătrânul Vârstelor sau Fiinţa Absolută. Cei Zece Sefiroţi (singular: o Sefirah, de la *Sapheir*, a socoti, a număra) au fiecare un nume şi un număr (vezi planşa IX). Lumea materială are şi ea 10 Sefiroţi, avându-1 regent pe demonul Sammael. Printre ei, Tohu este cel fără formă şi Bohu cel Gol (de unde *tohu-bohu*)[30]. Între Sefiroţii spirituali, al zecelea este Malkuth, Regatul; Numărul Zece este într-adevăr tot atât de important în Cabală ca şi în Mistica pitagoreică şi noi am văzut că el corespunde literei Yod sau G aspirat, transmis încă din îndepărtatul Ev Mediu pentaclurilor magicienilor, apoi centrului Stelei învăpăiate a Masonilor Operativi şi Francmasonilor, stea provenită şi ea, cu o parte din ritual, din pentagrama pitagoreicilor. O ramură a Cabalei practice este *Gematria*, prin care valoarea numerică a literelor duce la dezvăluirea unor importante mistere cuprinse în numele fiinţelor; fiica bastardă a Gematriei este Numerologia, care mai bântuie şi în zilele noastre.



PLANŞA IX

Cartea esenţială a înaltei Cabale (nu cea a Numerologiei pseudo ştiinţifice care, în general, i se substituie) este numită *Zoharul*; este atribuită rabinului Şimeon ben Yo'hai (secolul al II-lea d. Hr.) şi se pare că până la urmă a fost redactată de Moise ben Şemtov de Leon (sec. al XlII-lea). A fost tipărită la Mantua şi la Cremona (1558 şi 1560). Cele 72 de lame ale Tarotului (72° este între altele unghiul care

subîntinde latura pentagonului) fac şi ele parte din progenitura sulfuroasă a Cabalei.

Iată un citat din *Zohar* (cartea Splendorii), care reflectă îmbinarea ei cu idei neoplatoniciene, datând din epoca alexandrină: „Află că aceste palate cereşti sunt lumină pură, nu sunt nici spirite, nici suflete, nici vreo altă formă care să poată fi percepută prin simţuri. Află că Palatele sunt: Gândirea întrevăzută prin văl. Ridică vălul şi întreaga materie ţi se dezvăluie imaterială".

Eddington şi Heisenberg au ridicat vălul şi materia s-a imaterializat într-adevăr în „unde de cunoaştere".

Zoharul pomeneşte şi de „Microcosmos": „când Puterea divină îşi alcătuieşte un centru, ea creează un univers nou, microcosmosul".

Şi mai departe, un ecou din „Tabula Smaragdina" a lui Thot Hermes şi din Vitruviu:

„Forma Omului rezumă toate formele, atât ale lucrurilor superioare, cât şi ale lucrurilor inferioare. Deoarece această formă rezumă tot ceea ce este, ne folosim de ea pentru a-1 reprezenta pe Dumnezeu sub forma Bătrânului Suprem (En-Sof). Lumea superioară fecundează lumea inferioară atunci când omul, mijlocitor între gândire şi formă, găseşte în cele din urmă armonia... Tot ceea ce există este un corp animat de un singur suflet."

Pe lângă această influenţă a pitagorismului asupra gândirii ebraice[31] şi asupra formării Cabalei, trebuie să amintim teza interesantă a lui Isidore Levy, despre rolul pitagorismului în dezvoltarea eticii creştine. Influenţa pitagorismului şi a formei sale ebraice, Cabala, asupra redactării textelor zise „Ioanite" (Evanghelia a IV-a şi Apocalipsa) a fost deseori remarcată (Numărul fiarei, 666, corespunde în transcriere alfabetică lui Nero Caesar, numărul peştilor pescuitului miraculos, 153, este al şaptesprezecelea număr triunghiular)[32],de asemenea, cea a comunităţilor protomonastice de disciplină pitagoreică (Terapeuţi) asupra monahismului creştin din pustiu. Dar după Isidore Levy, chiar etica lui Hristos, întemeiată pe iubire şi cu totul diferită de rigoarea mozaică, ar fi fost inspirată de pitagorismul asociat neoplatonismului dominant în Asia Mică şi la Alexandria şi ale cărui rădăcini adânci în Roma Imperială au fost scoase la iveală de Cumont şi Carcopino. Aşa s-ar explica succesul imediat şi paradoxal al acestei noi religii întemeiate pe iubire, tot aşa cum au fost pitagorismul primitiv şi panteismul confuz în care acesta se transformase. Aşa cum scrie Isidor Levy:

„În acest fel se explică faptul enigmatic al triumfului Creştinismului. Cum să înţelegem că o doctrină elaborată în Iudeea la sfârşitul unei evoluţii religioase întru totul singulare să poată oferi o hrană potrivită nevoilor spirituale ale societăţii greco-romane? Răspunsul este lesne de dat pentru cel care a observat filiaţia care

uneşte elenismul platonizant cu iudaismul din Alexandria, apoi din Iudeea şi cu Evanghelia. Esenţialul din religia care s-a ivit din Palestina în vremea cezarilor nu pătrunsese în Ieruaslim decât cu un secol mai devreme. Evanghelia a vrăjit lumea antică întrucât îi aducea, îmbibat de cel mai pătrunzător farmec exotic, un produs al gândirii greceşti, moştenitoare a unui îndepărtat trecut indo-european."

De altfel, această teză a fost reluată în mod independent de Simone Weil.

Cabala, Gnoza şi Magia îşi amestecau doctrinele şi superstiţiile pe terenul predestinat al vechiului pământ al faraonilor, unde înflorea şi hermetismul plasat sub oblăduirea unui misterior Hermes Trismegistul, moştenitor al ezoterismului egiptean de altădată şi reîncarnare al lui Hermes Thot, scrib al zeilor şi călăuză a sufletelor în lumea de dincolo.

Diagrame geometrice şi numere talismanice se transmiteau în curente paralele sau împreunate, cărora li se alătura filiera corporaţiilor de constructori, călăuzite tot timpul de jurământul secretului profesional şi care mai păstrau anumite taine matematice moştenite de la Marea Confrerie din Sicilia. În curând, după ce Alchimia, ivită ca şi Cabala din pământ alexandrin, se va alătura celorlalte discipline secrete, fluviul ocult îşi va continua cursul subteran de-a lungul Evului Mediu, iar în secolul al XVI-lea va apărea aproape la lumina zilei „Magia ştiinţifică" a lui Agrippa, Paracelsus şi John Dee. Este de ajuns să citãm câteva extrase din scrierile lor pentru a regăsi, încă vii, ecourile tradiţiei şi misticii pitagoreice amestecate cu reziduurile şi divagaţiile alchimiştilor şi ale Magiei Negre sau Albe[33].

Agrippa de Nettesheim, elev al unui celebru erudit în ştiinţe oculte, abatele Trithemius, şi-a publicat *De Occulta Philosophia* la Anvers, în 1530. O parte însemnată a acestui tratat de magie este alcătuită dintr-o carte despre Cabală în care e izbitoare influenţa ideilor pitagoreice, ale lui Platon şi Nicomachos din Gerasa (prin Boethius). Iată câteva extrase:

„Ştiinţele Matematice, ca rude ale magiei, sunt atât de indispensabile acesteia, încât acela care, fără să le cunoască, crede că poate practica artele magice, se pomeneşte pe o cale întru totul greşită, se străduieşte de pomană şi nu ajunge niciodată la vreun rezultat. Căci tot ceea ce poate exista ca forţe ale firii care pot fi stăpânite nu sunt până la urmă decât Numere, Greutăţi, Măsuri, Armonie, mişcare şi lumină şi depinde de aceşti factori."

Agrippa se mărgineşte cu modestie la forţele naturale; forţele psihice, care nu sunt încă integrate în ştiinţa de astăzi, îşi pot găsi locul în expunerea sa. Metapsihica zilelor noastre se ocupă cu

condensarea, eliberarea, folosirea, aplicarea într-o direcţie determinată a energiei de esenţă spirituală, care depinde uneori de un centru sau de nişte rezervoare vii ce pot fi sau nu transcendente, dar pot câteodată să fie alcătuite din psihisme colective care comunică între ele fără ştirea conştiinţelor lor individuale. Dacă este vorba să comunicăm cu energii psihice dezincarnate, intrăm într-o ramură a magiei pe care o putem numi în bloc „ocultism". Însă pentru magicienii secolului al XVI-lea vechile simboluri şi-au păstrat valoarea incantatorie sau dinamică; diagramele geometrice, chiar pentagrama [înfăţişată de Agrippa ca un contur al omului-microcosmos[34]] sau „pentaclul" magic prin excelenţă, apar în primul plan. Să-l mai citäm pe Agrippa:

„încă de acum, fiind alcătuită din primul număr par feminin şi din primul număr impar masculin, pentada are o perfecţiune şi o putere remarcabile; în plus ea este jumătatea decadei, a numărului-tot... A fost la pitagoreici Numărul Căsătoriei... este şi numărul fericirii şi al graţiei, pecetea Sfântului Duh, legătura care înlănţuie tot;... filosofii păgâni aşezau pentada tot atât de sus deasupra Tetradei pe cât ceea ce este însufleţit domină ceea ce este neînsufleţit... Boethius spune: „Tot ceea ce, de la începutul lucrurilor, a fost zămislit de Natură pare alcătuit după relaţii numerice, ieşite din înţelepciunea Creatorului"[35]. „Numerele sunt în cele mai simple şi mai strânse legături cu ideile înţelegerii Divine... Puterile de care se bucură Numerele în Natura vie nu constau în numele numerelor, nici în numerele folosite pentru a ţine socoteli, ci în numerele puterii de înţelegere, formale şi naturale ... Cel care va izbuti să pună în legătură numerele uzuale şi naturale cu numerele divine va înfăptui miracole prin Numere".

Ne gândim la întreaga teorie a energiei atomice ieşită din formula lui Einstein, $E = mc^2$ (E - energie, m - masă, c - viteza luminii) şi nu ne mai mirăm că Descartes l-a luat în serios pe acest magician foarte rezonabil.

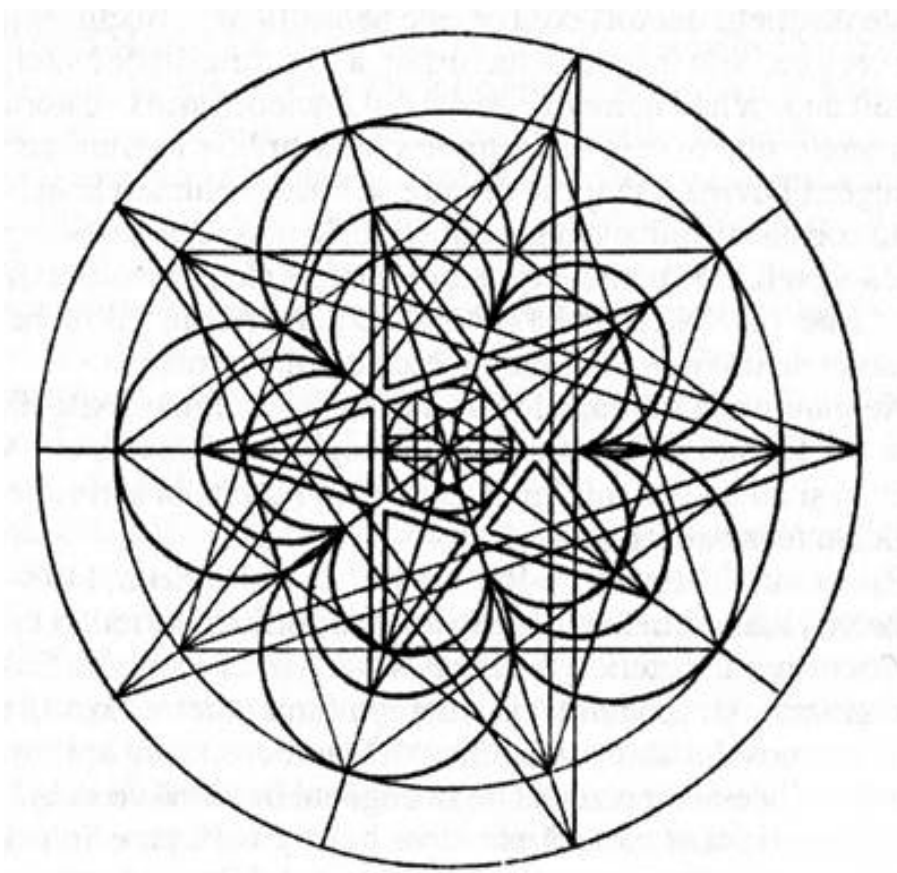
Paracelsus (Theophraste-Bombastus[36] de Hohenheim, 1493-1541) declară că toate semnele de care ascultă spiritele se reduc la două: Macrocosmosul materiei (*Natura Naturata*) sau Pecetea lui Solomon (hexagrama) şi „semnul cel mai puternic dintre toate, cel al Microcosmosului sau pentagrama" (Macrocosmosul spiritual sau *Numărul Tot* este reprezentat de Decagonul în formă de stea).

Să menţionăm aici că simetria hexagonală pare într-adevăr dominantă în *natura naturata* pasivă a cristalelor, iar pentagrama, sau mai degrabă simetria pentagonală, în morfologia fiinţelor vii. Un alt magician, contemporan cu Elisabeta a Angliei şi cu Rudolf al II-lea, celebrul John Dee, se exprimă în termeni asemănători. În sfârşit, în secolul al XVII-lea îl vedem pe părintele omnivor Athanase Kircher

citând şi el din Pentalpha şi Hexalpha (pentagrame şi hexagrame alcătuite din cinci sau şase litere A împletite); el aminteşte în legătură cu cea dintâi că este vorba de simbolul pitagoreic al armoniei şi al sănătăţii pe care Antiohus l-a văzut în vis pe *vexillum*-ul lui Alexandru. într-un alt capitol (*De Cabbala Pythagorica*), savantul iezuit vorbeşte despre misteriosul Tetraktys al lui Pythagoras, despre Decadă (Numărul armoniei desăvârşit între toate) şi despre cei zece Sefiroţi; se întoarce la Pentadă:

Mirum igitur non est, Pythagoreos tantum virtuti tribuisse Quinario, ut eius ope compositionem animae deprehenderent.

Iar în legătură cu atribuirea Senarului (Numărul Şase) lumii anorganice, el este la fel de categoric: *... ita et Senarius omnem materialem cognitionem dispertiendam numerandamque assumit.*



PLANŞA X

Să nu uităm tratatele de „ştiinţă neagră" atribuite celebrului Dr. Faust [precum *Hollenzwang* şi „Cabala Nigra et Alba" - Passau, 1604 -

despre care se pretinde că sunt scrise de mâna sa şi vorbesc despre legăturile sale cu unul din cei şapte prinţi ai infernului; Mefistofeles sau Mefistofiel[37]].

Dr. Faust a existat cu adevărat şi a operat mai ales în Boemia, patria favorită a ocultismului şi a fantasticului, a lui Rabbi Loëw şi a Golemului, în care strada Alchimiştilor mai există şi acum de-a lungul zidurilor Hradschin-ului.

Un caz ciudat de convergenţă ne înfăţişează, într-un roman gnostic din secolul al II-lea sau al III-lea d.Hr., pe un anume Faustus, tovarăş al lui Simon Magel (*Le probleme litteraire et historique du roman pseudo-Cléementin*, Oscar Cullman, ed. F. Alean).

Am mai întâlnit până acum principiul analogiei al lui Pythagoras, scos din *Hieros Logos* („Natura este întotdeauna asemănătoare sieşi"); Cabala nu a lăsat să-i scape un îndemn atât de încurajator de a jongla cu simbolurile şi l-a adoptat. În amalgamul Cabală – Gnoză - Hermetism el se iveşte într-un distih care subliniază corelaţia analogică macrocosmos-microcosmos.

Id quod inferius
Sicut quod superius

(împrumutat din „Tabula Smaragdina" a lui Hermes Trismegistul).

Alchimiştii, Roza-Crucienii, Magicienii din Renaştere au adoptat la rândul lor acest distih drept formulă şi program, reprezentând pentru cei dintâi, în mod cu totul deosebit, simbolul corelaţiilor fizice şi psihice între principiul masculin („Leul Roşu") şi principiul feminin (*Înger*), Yod şi He, combinate în Alkaest.

Această revenire la suprafaţă a vechiului pitagorism pe căile suspecte ale ocultismului şi ale magiei coincide, de altfel, cu dezvăluirea celor mai importante secrete ale sale în cartea lui Luca Pacioli şi cu întemeierea academiilor platoniciene, pentru care cea a lui Cosimo de Medicis, de la Florenţa a constituit prototipul (întemeiată în 1442 şi având printre alţi membri pe Marsilio Ficino, Pico della Mirandola, Alberti şi Plethon).

Puţin mai târziu, Reforma a dat o lovitură de moarte ghildelor zidarilor şi tăietorilor de piatră şi secretului, păstrat până atunci cu străşnicie, al planurilor de construcţie şi al felului în care proporţia le controla *symmetria* (în sensul vitruvian al cuvântului).

Descendenţa spirituală a lui Agrippa nu s-a stins, planşa X reprezintă steaua în cinci colţuri a unui magician modern influenţat de simbolismul roza-crucian.

CAPITOLUL VIII

AVATARELE PENTAGRAMEI - CORPORAŢIILE DE CONSTRUCTORI - TRANSMITEREA PLANURILOR DE CONSTRUCŢIE-SOCIETĂŢILE SECRETE CHINEZEŞTI - CONCEPŢIA CHINEZEASCĂ DESPRE NUMĂR: PERMUTĂRI ŞI COMBINĂRI - „CARTEA TRANSFORMĂRILOR"

Veder voie va come si convenne
L'imago al cerchio, et come vi s'indova.
(DANTE, Paradiso)

Am amintit câteva dintre căile tăinuite prin care s-au transmis de-a lungul vremurilor mistica pitagoreică a numerelor, simbolurile, talismanele şi chiar superstiţiile ei. Şirului obscur de alchimişti, cabalişti, rozacrucieni şi magicieni trebuie să-i adăugăm şi pe aceia care au transmis planurile de construcţie ale arhitecţilor şi maeştilor zidari şi secretele lor, care nu sunt decât secretele geometrice ale pitagoreicilor, care au pricinuit excomunicarea lui Hipocrates din Chios şi lui Hippasos.

Cu toate că arhitecţii au fost mai discreţi decât practicanţii magiei negre sau albe, putem oricum stabili o filieră neîntreruptă, începând cu corporaţiile greceşti de constructori, continuând cu cele romane (*Collegia Opificum*), care au rezistat prin vremurile întunecate ale invaziilor barbare până în perioada caroliginană, cu corporaţiile bizantine, cu atelierele mănăstireşti din marile abaţii carolingiene (Cluny, Corvey, Saint-Gall, Monte-Cassino etc.), în sfârşit cu ghildele de arhitecţi şi zidari din Evul Mediu, culminând cu Marea Federaţie a zidarilor şi tăietorilor în piatră care asculta de Marea Lojă a Catedralei din Strasbourg.

Ghildele de constructori, masoni operativi din Evul Mediu, erau, ca şi *Collegia* antice, societăţi secrete în care se transmiteau de la maestru la iniţiat atât secrete profesionale cât şi rituale. Aceasta reiese din câteva documente sau regulamente (foarte puţine) care din întâmplare n-au fost distruse, ci au fost adunate, mai ales în Anglia, la British Museum, sau în lojele masonice speculative (cele ale francmasoneriei „Filosofice", întemeiată la Londra în 1717, care a împrumutat în mare parte ritualul şi simbolurile lojelor operative). Documentele asociaţiei „Bauhütte" (Federaţia lojelor de constructori din Sfântul Imperiu) menţionează, pe lângă semne lapidare (semnăturile în piatră ale maeştrilor masoni semnături care prezintă o geometrie înrudită cu aceea a planurilor de construcţie însă bazată pe pătrat şi pe triunghi şi nu pe pentagon), mijloacele de recunoaştere,

parolele, gesturile, etc.[38], precum şi secretele profesionale (*Heimlichkeiten*, dintre care cel mai important era *Grund*-ul sau arta traseelor) pe care şi le transmiteau maeştrii arhitecţi din generaţie în generaţie, în paralel cu confraţii lor din Franţa şi Anglia. În Manuscrisul „Regius“ sau *Poemul Masonic* de la British Museum, care datează de la sfârşitul secolului al XIV-lea, se găseşte pasajul următor privitor la secretul maestrului pe care trebuie să-l respecte întocmai ucenicul şi companionul:

„Tainele Camerei Maestrului nu vor fi încredinţate nimănui, nici ceea ce vei fi făcut tu în lojă, orice vei auzi sau vei vedea nu spune nimănui, oriunde te-ai duce”.

În Manuscrisul Cooke, care se găseşte la British Museum şi este o copie de prin anii 1430-1440 a unui text de la sfârşitul secolului al XIV-lea, se spune despre Pythagoras că ar fi descoperit una din coloanele pe care fuseseră gravate principiile artei de a construi (cealaltă coloană a fost găsită de Hermes):

„Masonul *va păstra secretul* companionilor atât cu privire la lojă, cât şi la casa particulară şi la orice loc în care se găsesc masonii. El nu va trăda Arta masonică.”

Într-un alt manuscris (mss. nr. 2 al Marii Loji din Londra) se poate citi:

„Veţi păstra în mare taină punctele cele mai obscure şi mai complicate ale ştiinţei voastre, nedestăinuindu-le nimănui dintre cei ce nu le studiază şi folosesc”.

Găsim acelaşi lucru în Manuscrisul William Watson, un rulou de pergament lung de douăsprezece picioare, care datează din ultima treime a veacului al XV-lea. Anexa la manuscrisul Harleian nr. 2024, din jurul anului 1650, precizează:

„Vi se vor dezvălui mai multe cuvinte şi semne ale unui mason liber de care veţi fi făcuţi răspunzători în faţa lui Dumnezeu în marea şi înfricoşătoarea zi a judecăţii, trebuind să le păstraţi în taină şi să nu le destăinuiţi nimănui”.

Confreria din Sicilia nu era, nici ea, mai puţin exigentă. Printre simbolurile moştenite prin tradiţia *Collegiilor* antice se află, de altfel, indestructibila pentagramă sub forma „Stelei înflăcărate", având în centru litera G, care reprezintă *Yod*-ul ebraic şi Decada; ritualul propriu-zis provine, totodată, din ritualul pitagoreic şi din cel al Misterelor din Eleusis, cu unele reminiscenţe egiptene încă şi mai vechi. Aceste afinităţi şi legături evidente între meşterii greci şi Confreria pitagoreică se explică prin faptul că corpusul matematic de teorii ale proporţiei, ale simetriei şi ale euritmiei folosite de arhitecţii din marea epocă greacă era împrumutat direct de la disciplinele matematice ale Confreriei, după cum putem uşor vedea în Vitruviu[39]. Ecoul lor direct se găseşte într-o frază a lui Campanus de

Novara (din secolul al XlII-lea), prin care subliniază felul în care „Secţiunea de Aur" leagă în mod logic (*rationabiliter*) cele cinci solide platoniciene printr-o simfonie iraţională (*irrationali symphonia*), adică printr-o proporţie sau printr-un şir de proporţii iraţionale.

Am examinat în amănunt mecanismele acestor transmiteri de-a lungul secolelor în mai multe lucrări, îndeosebi în *Numărul de aur*, pe care am mai menţionat-o, iar acum nu mă voi mai opri asupra acestui subiect decât pentru a menţiona analiza planurilor de construcţie gotice făcută de arhitectul german Moessel, care le-a redus la câteva diagrame fundamentale bazate pe pantagonul şi decagonul regulat şi deci, firesc, pe Secţiunea de Aur. Pentru arhitectura grecească pare să fi fost normală folosirea dreptunghiurilor „dinamice" ale lui Hambidge şi se pare că dintre aceste drepunghiuri cele care au dat cea mai mare parte a planurilor au fost „dreptunghiul de aur" şi dreptunghiurile $\sqrt{5}$ şi $\sqrt{5}/2$ (acesta din urmă fiind caracteristic pentru proporţiile corpului omenesc). Diagramele circulare de tip „Moessel" apar, dimpotrivă, în alcătuirea multor tablouri din Renaştere (Rafael); în zilele noastre s-a folosit de acestea regretatul Jean Puiforcat (statuia lui Descartes din Haga etc.).

Ceea ce am putea numi pitagorism monastic sau neoplatonism benedictin a înflorit şi în Evul Mediu, după cum putem vedea din tratatul *De mundi universitate sine Megacosmos et Microcosmos*, de Bemard Sylvestre; călugăriţa benedictină Hildegarde din Bingen (1098-1179), stareţa din Rupertsberg (Sfânta Hildegarde), ne descrie în cartea sa, *Sci vias*, viziunile cosmogonice în care „Nous-uI“ (Sufletul lumii) sau Macrocosmosul spiritual, întrepătrunde, domină şi armonizează monstrul haotic (*Hyle*, materia primordială). Într-una din ilustraţii omul este înfăţişat gol în mijlocul unui univers planetar de care îl leagă nişte raze ce formează un poligon stelat. Contemporana sa, stareţa alsaciană Herrade din Landsberg, într-o miniatură a lucrării sale *Hortus Deliciarum*, ne înfăţişează, de asemenea, un om gol numit „microcosmus“, legat cu nişte raze de macrocosmosul circular care-1 înconjoară. Scrierile Hildegardei au avut o mare influenţă asupra abatelui Trithemius, maestrul în ştiinţe oculte al lui Agrippa de Nettesheim.

Ghildele de arhitecţi şi de zidari şi-au pierdut monopolul şi influenţa o dată cu ivirea Reformei; aceasta a coincis cu Renaşterea, adică cu scoaterea la lumină a teoriei platoniciene despre proporţie şi rolul Secţiunii de Aur ca legătură între cele cinci corpuri platoniciene prin minunatul tratat *Divina Proportione* al lui Luca Pacioli, ilustrat de prietenul său Leonardo da Vinci. Am semnalat deja academiile platoniciene care şi-au făcut apariţia în această reînnoire a neoplatonismului: Plethon pretindea că aduce Florenţei tradiţia

societăţilor pitagorico-platoniciene, care ar fi supravieţuit în Imperiul Bizantin după închiderea oficială a şcolilor păgâne de către Justinian. întrucât aceste academii din Quattrocento, cu aspectul lor de societăţi secrete cu ritualurile mistice, pretindeau să se revendice şi de la misterele antice. Din 1468, Papa Paul al II-lea a început să le ameninţe cu excomunicarea.

Dintre societăţile secrete afiliate alchimiştilor am citat Roza-Cruce; numele acesteia a apărut întâia oară în *Fama Fratemitatis* de Jean-Valentin Andreae (1614), însă existenţa autentică şi continuă a lui „Collegium Lucis“ nu a fost niciodată dovedită; Michel Meier (1568-1622), medic al împăratului Rudolf al II-lea, şi-a publicat totuşi lucrarea *Themis Aurea, hoc est de legibus fratemitatis Rosae Crucis*, iar hermetiştii englezi Robert Fludd şi Elias Ashmole, membri onorifici ai lojelor masonice operative, treceau drept roza- cmcieni, aşa cum fusese înaintea lor Francis Bacon. Michel Meier menţionează, fără a arăta unde se află aceasta, un „colegiu al filosofilor" care ar exista din cele mai îndepărtate vremuri şi ar fi legat de misterele egiptene, eleusine, orfice şi pitagoreice. În ciuda lipsei unor date mai autentice, pare a fi dovedită printr-o scrisoare adresată din Lyon de către medicul Landolf, pe la 1510, lui Agrippa de Nettesheim existenţa a cel puţin unei societăţi hermetice de acest fel; acest document îi recomandă celebrului magician un „căutător zelos, aducătorul scrisorii, şi îi sugerează să-l pună la încercare în vederea eventualei primiri într-o anumită societate (*si in nostra velit jurare capitula, nostro sodalicio adscitum face*). Descartes s-a interesat mult de Roza-Cruce din epoca sa (aceea a lui Fludd şi Ashmole) pe care a frecventat-o la Ulm, în casa lui Faulhaber, şi în Olanda, la cel mai bun prieten al său, Hegeland.

Societăţile secrete sau semisecrete constituite de-a lungul veacurilor par să se inspire, toate, din tradiţiile autentice sau apocrife care pretind că se trag din Marea Confrerie Pitagoreică, din Orfism, din Misterele de la Eleusis; filiaţia egipteană[40] este întotdeauna revendicată.

Anumite înrudiri sunt, în mod evident, ciudate. Să remarcăm menţionarea Templierilor, o altă societate secretă devenită atât de puternică încât Filip cel Frumos şi Clement ai V-lea s-au unit spre a o distruge (supliciul lui Jacques de Molay, Mare Maestru al Templului, a avut loc la 18 martie 1314), atât în tradiţiile francmasoneriei, cât şi în ale Companionajului (rămăşiţă a lojelor independente de meşteşugari, nesupusă jurandelor şi ghildelor oficiale). Numele Sfântului apostol Ioan apărea şi în ritualul Templierilor, al căror patron era, sărbătoarea Sfântului Ioan (solstiţiul de vară) era data cea mai însemnată pentru templieri, aşa cum este şi astăzi pentru francmasonii de rit scoţian[41]. în această zi de Sfântul Ioan a fost întemeiată, în 1717,

Marea Lojă (speculativă) a Angliei, iar primele trei grade din iniţierea masonică, moştenite de la Bauhütte, constituie francmasoneria, „loanită".

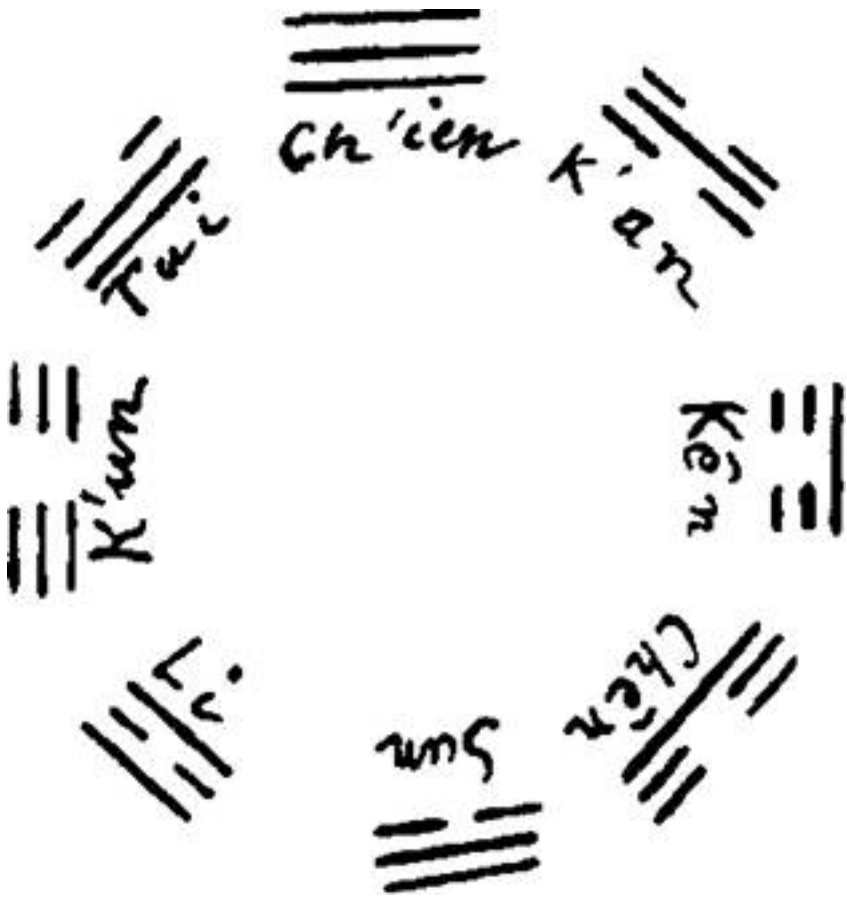
Printre coincidenţele care ar putea fi adevărate transmiteri să semnalăm că în „micile mistere" de la Eleusis neofitul îşi punea la începutul iniţierii piciorul stâng desculţ pe pielea unui bcrbec; în iniţierea masonică de gradul I figurează, se pare, un rit asemănător în care se foloseşte tot piciorul stâng. Pe un anumit număr de timpane de catedrale (cum este cel de la Sfântul Ştefan din Viena) veşmântul lui Hristos „în slavă" este ridicat pentru a arăta, dezgolit, genunchiul stâng şi această dezvelire voită şi pusă în evidenţă trebuie să aibă un sens; nu ştiu dacă biserica îl explică, dar ar putea fi unul dintre simbolurile al căror secret l-au luat cu ei maeştri zidari din Evul Mediu, aceia care şi-au gravat „semnăturile" geometrice pe cheile de boltă ale atâtor biserici gotice. Una din legendele despre Pythagoras, aceea care a făcut din el întruchiparea hiperboreanului Apollon, relatează că fiind recunoscut de Abaris, preot chiar într-unul din templele acestui zeu situat în ţara cimerienilor, Pythagoras i-a arătat „coapsa lui de aur" pentru a confirma recunoaşterea, cerându-i să păstreze secretul.

Zeiţa egipteană Maat, zeiţă a măsurii şi a echităţii şi, împreună cu Isis şi Thot, stăpână a iniţierilor, avea drept amuletă acelaşi echer („unghiul echităţii" al lui Pythagoras) pe care îl vedem pe mormintele arhitecţilor romani la Roma şi Pompei şi sub busturile unor „maiştri" gotici, echer care mai face şi astăzi parte din insignele şi simbolurile masonice ale lojelor.

Ştim că cea mai puternică societate secretă chinezească se numea „Triada" şi era legată, în oarecare măsură, de mistica numerelor, mistică, după cum vom vedea, ce se deosebeşte prin punctul său de vedere şi anumite amănunte de mistica pitagoreică, dar apropiindu-se de aceasta prin altele; a ajuns la ceea ce am putea numi mistica combinărilor.

Alături de numărul Trei (Triada), Pentada este şi ea un principiu de armonie, îmbinare a primului număr feminin şi a primului număr masculin complet; dar, după cum este dezvăluit în *Yi Jing* sau „Cartea schimbărilor", datată cu o mie de ani înaintea lui Iisus Hristos, carte de bază a acestei mistici a combinărilor, punctul său de plecare se află în cele două principii esenţiale denumite Yang şi Ying, principiul masculin esenţial şi principiul feminin esenţial (— , şi --), lumina şi umbra, Cerul şi Pământul. Aşadar principiul masculin are ca simbol o bară — iar principiul feminin o bară întreruptă -- (imparul şi parul având acelaşi simbolism ca în mistica pitagoreică). Dacă combinăm aceste două simboluri câte trei, în toate chipurile cu putinţă, obţinem combinările următoare:

A — - - — - - — — - - - -
A — - - - - - - — - - - - —
A — - - - - — - - — - - —
sau, aşezându-le în cerc:



Acestea sunt în realitate aranjamentele cu repetiţie de două obiecte diferite luate câte trei. Formula generală pentru aranjamente de n obiecte luate câte p, fiind $A_{n=}^{p} n^{p}$, avem aici $2^3 = 8$ ca în a a a, b b b, a a b, a b b , a b a, b a b, b a a, b b a. Logica combinatorie care a inspirat stabilirea acestor „Opt Trigrame Magice“ (*Pa Kua*) deduce din aceste opt combinaţii primare ale lui Yang şi Yin principiile esenţiale ale Universului care rezultă, ca să spunem aşa, din procentajul celor două principii dominante (masculin şi feminin) din fiecare combinare.

Astfel simboul Ying sau Yin (numit și Kun) va avea următoarele calificative: umbra, receptivul, pământul ☷ ; Yang (numit și Ch'ien) va fi: Cerul, Principiul Creator, Lumina ☰ ; Tai ☱ simbolizează apusul, seninătatea, lacul, bruma, toamna, mlaștina; Li ☲ sudul, focul, soarele, căldura, verbul; Sun ☴ cel ce pătrunde, vântul, fluxul realităților, forțele modelate în idei sau în forme; Chên ☳ răsăritul, cel ce tulbură, stimulează, tunetul, lemnul; Kén ☶ calmul, muntele, tăcerea, meditația; Kân ☵ nordul, apa, luna, crosul.

Continuând jocul metafizic început astfel, filosoful chinez combină apoi cele opt trigrame, două câte două după formula $A_n^p = n^p$, care dă 8^2, adică 64 de noi combinări de tipul

unde fiecare dintre acestea reprezintă, prin înseşi procentajele şi amalgamările elementelor materiale, spirituale, dinamice, chimice etc., una sau mai multe idei abstracte sau concrete. Această alchimie a conceptelor poate continua la nesfârşit; îl voi cruţa pe cititor şi de lista celor 64 de entităţi sau calităţi din a doua serie, însă voi remarca faptul că, până şi în logica noastră occidentală, producerea în anumite probleme a tuturor combinărilor coerente posibile permite câteodată să se descopere unele soluţii care, fără această metodă, ar rămâne neobservate şi mai permite să se elimine soluţiile contradictorii.

Taoismul, a treia religie a chinezilor (celelalte două fiind Confucianismul şi budismul), ale cărui origini merg înapoi până la Yi Jing şi în care fraternizează ezoterismul înalt cu magia cea mai de jos, a alcătuit şi el un „arbore a lui Tao“, care seamănă cu arborele

sefirotic. Are şi el zece elemente, numai că două dintre ele, Tao însuşi (*Calea* sau *Sensul*) şi „Floarea de Aur“ (această frumoasă metaforă acoperă ţelul suprem al antrenamentului filosofic al taoismului) sunt dublate. Găsim aici Yang şi Yin, apoi Viaţa sau Iubirea (şi Soarta) Ming, esenţa sau Logosul personal, Hsing, *animus* şi *anima* ale lui Jung (p'o şi hun), în sfârşit, Kuei, sau fantoma care se întoarce pe pământ şi Sen sau spiritul reîncarnat care, după ce a ajuns la „Floarea de Aur“, se scufundă în beatitudinea lui Tao.

Să mai adăugăm că triunghiul lui Pythagoras 3, 4, 5 era cunoscut autorului sau autorilor cărţii *Yi Jing*. Este cu neputinţă de precizat dacă teorema pătratului ipotenuzei a fost descoperită în mod independent de către savanţii chinezi încă din epoca primelor dinastii istorice (Shang-Yin şi Chou din secolul al XVIII-lea până în secolul al III-lea î.Hr.) sau dacă au primit-o, pesemne, din Caldeea de unde China mai luase, între anii 3000 şi 2000 probabil, tehnica bronzului, primele noţiuni de agricultură, calul, căruţa şi roata, poate că şi tehnica ceramicii întărite în cuptor; singura invenţie chinezească propriu-zisă şi originară din epoca preistorică ar fi fost aceea a creşterii viermelui de mătase.

Să părăsim acum îndepărtata Asie pentru a ne întoarce la concepţia occidentală despre număr şi pentru a examina evoluţia ei în cursul erei noastre.

CAPITOLUL IX

NUMĂRUL ŞI MATEMATICA MODERNĂ - NUMERE RAŢIONALE, ÎNTREGI ŞI FRACŢIONARE - NUMERAŢIA ÎN BAZE DIFERITE- CONCEPŢIA DESPRE INFINITUL ACTUAL-PRINCIPIUL INDUCŢIEI TOTALE - PARADOXUL LUI BOREL-FRACŢIILE PERIODICE

Matematica este muzica raţiunii.
(SYLVESTER)

Cel mai mare progres în aritmetică, sau în folosirea numerelor uzuale sau vulgare, dar care a avut urmări şi asupra celei a numerelor ştiinţifice, a fost introducerea cifrelor arabe sau mai degrabă hinduse, şi a lui zero, în secolul X al erei noastre. La indieni cifrele apar încă din secolul al II-lea; zero a fost adăugat în secolul al IX-lea; iar arabii l-au împrumutat imediat. Cel mai vechi manuscris european, cuprinzând cifrele zise arabe şi pe zero, a fost redactat în Spania în anul 976; această notare, în mod special cu numerotaţie zecimală, simplifică radical toate operaţiile aritmetice[42].

Problema sistemelor diferite de numeraţie, adică a folosirii de diferite baze, îşi are locul aici; vom vedea mai departe că la ora actuală ea îşi găseşte în mod deosebit aplicarea în folosirea sistemului *binar* (în baza 2) pentru unele maşini de calculat. Suntem atât de obişnuiţi cu sistemul zecimal, încât ideea că pot exista şi alte sisteme, că numerele capătă alt aspect când este schimbată baza, ni se pare aproape absurdă; avem impresia că opt şi trei nu se pot simboliza altfel decât prin 8 şi 3, că numerele sunt o dată pentru totdeauna identificate cu cifrele prin care le reprezentăm. Este totuşi evident că alegerea bazei 10, deşi recomandabilă, a fost oricum arbitrară şi că am fi putut la fel de bine să alegem 8, 5 sau 3, sau mai degrabă opt, cinci sau trei, întrucât simbolurile nu rămân aceleaşi. Teoria foarte simplă a sistemelor de numeraţie într-o bază oarecare se întemeiază pe faptul că fiind dat un număr întreg finit N, scris, de pildă, în sistem zecimal, şi un alt număr p pe care vrem să îl alegem ca bază, avem întotdeauna:

$$N = ap^n + bp^{n-1} + \cdots kp + 1,$$

a, b, ... k, 1 fiind numere întregi finite oarecare, dar mai mici decât p (unele vor putea fi egale cu zero). Valoarea lui n va fi corespunzătoare cu mărimea numărului N (p^n fiind cea mai mare

putere a lui p al cărui multiplu este mai mic decât N); coeficienţii a, b, c ... de multiplicare vor fi fireşte mai mici decât p, altfel primul termen ar deveni, de pildă, cel puţin p^{n+1}.

Atunci numărul N, în sistemul în bază p, se poate scrie a b c ... 1, fiecare dintre aceste cifre putând fi zero, însă numărul lor fiind întotdeauna egal cu n + 1.

Exemple:

în sistemul nostru zecimal, 563 este reprezentarea simbolică a lui 5 x 10^2 + 6 x 10^1 + 3, 500 reprezintă 5 x 10^2 + 0 x 10^1 + 0.

Tot acest număr 500 (numărul intrinsec, iar nu cifrele sale care se schimbă o dată cu baza de numeraţie) va căpăta diferite aspecte, după cum luăm ca bază numerele 5, 4, 3, 2. De exemplu:

în sistemul în bază 5 vom avea:

$500 = 4x5^3 + 0x5^2 + 0x5 + 0$ care se va scrie 4000;

în sistemul în bază 4 vom avea:

$500 = 1x4^4 + 3x4^3 + 3x4^2 + 1x4 + 0$ care se va scrie 13340;

în sistemul în bază 3 vom avea:

$500 = 2x3^5 + 0x3^4 + 0x3^3 + lx3^2 + lx3^1 + 2$sau 200112;

în sistemul de bază 2 vom avea:

$500 = 1x2^8 + 1x2^7 + 1x2^6 + 1x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 0 \text{ x } 2^1 +$ 0 care se va scrie 111110100.

Dacă alegem o bază mai mare decât 10 principiul rămâne acelaşi, dar va trebui să dăm simboluri speciale lui 10 şi numerelor cuprinse între 10 şi bază, de exemplu pentru baza 12 vom putea lua pentru 10 simbolul б, pentru 11 simbolul є. Atunci, în exemplul precedent vom avea:

$500 = 3 \text{ x } 12^2 + 5x\ 12 + 8$ care se va scrie 358.

Vedem aşadar că nu trebuie să confundăm numerele cu simbolurile lor. Sistemul nostru zecimal, cu cifrele sale arabe şi cu 0, este atât de uşor de folosit încât am ajuns să facem această confuzie; exemplele de mai sus ne arată că este arbitrară şi că, după cum afirmau pitagoreicii despre numerele lor divine şi chiar ştiinţifice, fiecare număr are o valoare intrinsecă şi proprietăţi intrinseci, într-un cuvânt are o personalitate independentă de baza de numeraţie.

Pentru pitagoreici, care nu se ocupau de numere ca de nişte instrumente de calcul practic sau comercial, problema bazei de numeraţie nu se punea, întrucât numerele figurate, deopotrivă numere şi forme geometrice, erau reflectările arhetipurilor sau numere pure şi îşi păstrau proprietăţile intrinseci concret vizibile ca forme şi ca legi de creştere. Proprietăţile algebrice ale numerelor întregi ca şiruri de funcţii crescătoare erau manifestate prin gnomoni sau diferenţe prime, secunde etc.,precursoare ale calculului modem al diferenţelor folosit

de anumite maşini de calcul. Acest calcul al diferenţelor este el însuşi un model, în numere întregi al calculului diferenţial; la fel ca pentru diferenţiala unei funcţii, gradul unei diferenţe este întotdeauna mai mic cu o unitate decât gradul funcţiei mamă. Pentru o funcţie de gradul n sau pentru un număr solid (hipersolid) cu n dimensiuni, cea de-a n-a diferenţială sau diferenţă este constantă, cea de ordinul n + 1 este nulă. Am dat exemple în capitolul VI, consacrat numerelor figurate; pentru numerele solide dodecaedrale a treia diferenţă este constanta 27, pentru numerele plane pentagonale a doua diferenţă este constanta 3. Toate acestea (teoria diferenţelor gnomonice) mai ţin încă de matematica grecească, iar de la Decartes încoace foarte puţini savanţi s-au mai ocupat de numerele figurate, în afară de Sir d'Arcy Thompson, care a scris o frumoasă carte despre creşterea şi morfologia organismelor vii (*Growth and Form*, Cambridge University Press). Trebuie totuşi să amintesc articolul lui Mott-Smith, apărut în 1916 în *Monist* şi intitulat „The Arithmetic Pyramid of Many Dimensions“ şi care este, după câte ştiu, primul care a descris relaţiile între piramidele şi hiperpiramidele lui Pascal, specificaţiile piramidelor regulate cu n dimensiuni şi dezvoltarea „multinomului“ ($a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^m$.

Pentru a ajunge la matematicile de astăzi (căci despre ele este vorba în acest capitol), numerele propriu-zise sunt clasificate acum în mod firesc astfel:

Numere reale
- Numere naturale sau întregi } numere raționale
- Numere fracționare } numere raționale
- Numere iraționale algebrice
- Numere iraționale nealgebrice, dar netranscendente
- Numere transcendente
- Numere imaginare
- Numere complexe (imaginare și reale combinate)

La un alt nivel, avem clasificarea în numere finite şi numere infinite sau mai curând „transfinite“; nu este vorba aici de infinitul simbolizat prin <», limita ideală şi de neatins a unei mărimi sau a unui număr mai mare decât orice cantitate dată, ci de numere infinite concrete, actuale, *percepute* de inteligenţă ca atare şi clasificate în ordinea mărimii. Problema posibilităţii unui „infinit actual”, sau chiar

a conceperii sale, a dat naştere, la vremea sa, unei întinse polemici. Exemplul unui infinit actual conceptibil şi chiar concret este dat de posibilitatea ca Universul să fie infinit ca întindere şi populat cu aştri sau cu nebuloase uniform repartizate. Acesta era Universul logic admis înainte ca ipoteza unui univers finit curbat în spaţiul-timp să fi fost emisă de Einstein şi acceptată ca posibilă şi chiar ca probabilă; acest univers al lui Einstein ar avea un număr finit de nebuloase şi de stele într-un volum finit şi care ar putea fi calculat (telescopul de pe muntele Palomar va putea confirma această ipoteză şi permite acest calcul). Dar înainte de Einstein mai toată lumea credea într-un univers infinit şi cu un număr infinit de stele; se concepea, aşadar, existenţa posibilă a unui infinit actual, concret.

Nu consider aici drept numere care trebuie să intre în cadrul acestei cărţi elementele anumitor prelungiri matematice precum calculul determinanţilor, al matricelor, al corpurilor ideale etc.; deşi, în ultimă instanţă, în spatele acestor construcţii impunătoare se ascund numere, „personalităţile" lor nu joacă aici nici un rol şi este vorba mai degrabă de logică simbolică decât de matematică propriu-zisă. Nu ne vom ocupa nici de uriaşa dezvoltare a teoriei funcţiilor; simpla enumerare a domeniilor şi a definiţiilor sale ar cere o lucrare separată, iar lucrarea de faţă nu este un tratat de analiză sau chiar de algebră, nici măcar de teoria numerelor, ci o expunere rapidă a rolului Numărului ca factor însemnat in istoria misticii şi a filosofiei occidentale.

Şi totuşi, o noţiune foarte generală, dar care ţine de domeniul Numărului îşi găseşte locul aici: este vorba de mulţime. „în matematică o mulţime ... este reunirea, socotită ca formând o nouă entitate, a mai multor entităţi numite «elementele mulţimii»". (*Encyclopedie Française*). Există mulţimi finite, precum mulţimea atomilor de oxigen într-un recipient dat. Există mulţimi infinite, precum şirul complet, socotit încheiat, al numerelor naturale l, 2, 3, 4, ... n când n s-a mărit dincolo de orice număr dat... Intrăm deja în domeniul transfinitului; de altfel, teoria cantoriană a transfinitului este cea care a făcut cu putinţă stabilirea unei teorii coerente a mulţimilor.

Să ne oprim pentru moment la mulţimile finite sau, cel puţin, la noţiunea generală de mulţime, înainte să facem vreo distincţie între cele două tipuri, finit sau infinit. Zicem că două mulţimi sunt *echivalente* sau au aceeaşi putere dacă fiecărui element al uneia putem face să-i corespundă un element, numai unul, din cealaltă (corespondentă biunivocă sau univocă şi reciprocă). Definim atunci drept număr cardinal al unei mulţimi această putere, care este totodată caracteristica comună a tuturor mulţimilor care îi sunt echivalente. Putem trece de aici la numerele naturale plecând de la

numerele 0, 1 şi 2 şi începând cu prezentarea lor logistică. Astfel, numărul *unu* derivă din principiul logic al identităţii: „Ceea ce este, este şi nu poate, în acelaşi timp şi sub acelaşi raport, să nu fie“. Aceasta este într-adevăr prima intuiţie, apoi idee logică, descoperită de inteligenţă îndată ce şi-a format noţiunea de *existenţă* a sa, de fiinţă („este cineva care gândeşte sau care simte, aşadar care este"; sau şi mai smerit, „este ceva care simte plăcere sau suferinţă")[43]. Noţiunea de dualitate va fi sugerată de discriminarea dintre entitatea gânditoare (fiinţa de putere „unu") şi restul universului, obiect al percepţiei. Noţiunea de negaţie, a nefiinţei, este şi ea sugerată de principiul identităţii: ceea ce poate în acelaşi timp să fie şi să nu fie, nu este, sau mai degrabă „este ceea ce nu este". Aceste trei puncte de plecare sunt anterioare noţiunilor de „număr unu", de „număr doi", sau pereche, şi de număr 0. Trecerea de la numărul unu (putem neglija aici, pentru moment, numărul doi ca individualitate specială) la un număr întreg natural oarecare se obţine practic prin operaţie de descompunere a unei mulţimi; se ia din mulţime un element şi se notează această scădere cu un simbol care va reprezenta o unitate, şi pe care o vom numi „puterea unu". Acest simbol va putea fi, de pildă, simbolul 1 (ar fi putut fi un punct, aşa cum era pentru greci). Dacă vom înlătura mai departe unităţi, până la terminarea mulţimii, vom fi adăugat primului un anumit număr de simboluri 1, iar puterea sau „numărul cardinal" al mulţimii 1 astfel aliniate va fi, de asemenea, puterea sau numărul mulţimii iniţiale de obiecte. Nu vom putea decât mai târziu să reprezentăm colecţiile de simboluri 1 prin cifre care să corespundă într-un mod mai abstract puterilor sau numerelor 2, 3, 4... etc.; ceea ce va permite să trecem de la operaţii mai grele pe mulţimi la operaţii mai abstracte pe cifre sau simboluri. Dar când am alcătuit prima mulţime de simboluri 1, am observat că treceam de la o mulţime (sau de la un număr) la următoarea, adăugând de fiecare dată simbolul unităţii, al numărului unu. Există aşadar o operaţie iterativă, recurentă, care permite într-un mod general să trecem de la un număr la următorul; fiecare număr are un număr consecutiv, succesor.

Aici putem introduce, arbitrar, dar logic (şi acest lucru va simplifica mult aritmetica şi algebra), noţiunea de cifră a unei mulţimi care nu comportă nici un element; va fi cifra 0 corespunzând unui număr zero (i-am văzut arhetipul logic în noţiunea de negaţie opusă afirmaţiei reprezentată de noţiunea de fiinţă). Aceasta ne permite să trecem la principiul fundamental numit al „inducţiei totale":

„Dacă o proporţie este adevărată pentru numărul 1, şi dacă se poate demonstra că: dacă este adevărată pentru numărul n, ea este adevărată şi pentru numărul n + 1, ea va fi adevărată, oricare ar fi numărul n, adică pentru toate numerele întregi". Este uşor să trecem de aici la definiţiile „prin recurenţă" ale adunării şi ale înmulţirii şi ale

principiilor de asociativitate şi de comutativitate. După ce am stabilit un nou înţeles pentru cuvântul „putere", care nu mai corespunde numărului cardinal, puterii unei mulţimi, ci faptului că un număr a fost înmulţit de n ori cu el însuşi şi se spune atunci că este „la puterea n", simbolizăm aceasta prin exponentul n, iar numărul la puterea n va fi reprezentat prin a^n. Simbolul $\sqrt{\ }$, al radicalului, denotă inversul unei puteri. Dacă $x = a^n$, a este rădăcina de ordinul n al lui x, numărul care înmulţit de n ori cu el însuşi (a x a x a x a x a ..., de n ori) îl reproducem pe *x*, şi scriem $a = \sqrt[n]{x}$. Convenim să scriem

$a + 0 = a$

$a \times 0 = 0$

$a \times (x + 1) = ax + a$, apoi $a^\circ = 1$, $a^{x+1} = a^x a$, $a^1 = a$,

$a^2 = a \times a$ etc.

de unde

$a^{x+y} = a^x \times a^y$, $a^{xy} = (a^x)^y$.

Am menţionat deja numerele sau mulţimile transfinite; matematica modernă nu se teme să le introducă la începutul teoriei numerelor, înainte chiar de a trece la numerele fracţionare sau incomensurabile; paradoxul aparent peste care dăm însă de la început este că numărul sau puterea mulţimii numerelor întregi, şi numărul mulţimii numerelor pătrate, sau al numerelor impare, sunt egale între ele; după cum demonstrase deja Galilei, putem pune în corespondenţă univocă şi reciprocă cele două şiruri:

1 2 3 4 5 6 7 8 ...

1 4 9 16 25 36 49 64 ...

continuate nedefinit deşi al doilea nu este, evident, decât o parte din primul. Concluzia lui Galilei a fost pur şi simplu că această absurditate dovedea că numerele infinite nu există.

Cantor, nelăsându-se speriat de paradox, a dedus de aici, cu îndrăzneală, că în regatul transfinitului partea poate fi egală cu întregul şi a luat chiar această proprietate drept definiţie a claselor sau a mulţimilor transfinite. Numerele transfinite sunt cele care pot fi echivalente (avea acelaşi număr cardinal) cu părţile lor. Numerele pentru care partea nu este egală cu întregul sunt numere obişnuite, finite, care nu sunt, în această concepţie, decât un caz particular al numerelor transfinite.

Voi menţiona, anticipând teoria transfinitului (pe care o vom întâlni mai jos), că în timp ce pentru mulţimile finite numărul cardinal şi numărul ordinal al mulţimii coincid şi pot folosi aceeaşi cifră sau acelaşi simbol, dimpotrivă, pentru mulţimile transfinite o mulţime dată are un număr cardinal determinat, dar un număr oarecare de

numere ordinale, ba chiar un număr infinit, după modul, modurile, în care membrii mulţimii pot fi „ordonaţi".

După această escapadă în stepele transfinitului, să ne întoarcem, pentru moment, la aritmetica numerelor întregi. Principiul înmulţirii numerelor întregi, derivat din cel al adunării, duce în mod natural la cel al împărţirii.

Dacă a x x = b, *b* este un multiplu al lui *a* iar *a* este un divizor al lui *b* (a şi x de altfel). Dar dacă putem întotdeauna înmulţi două numere întregi între ele, nu putem împărţi mereu un număr întreg la un altul (obţinând un număr întreg ca rezultat). Numerele fracţionare se introduc atunci în mod direct presupunând că există întotdeauna un

$\frac{b}{a}$

număr x în asa fel încât = x; când x nu este întreg, este fractionar. Numerele întregi împreună cu numerele fracţionare constituie clasa numerelor raţionale; acestea sunt rădăcinile ecuaţiilor de gradul întâi de tipul ax ± b = 0. Trebuie să amintesc aici şirul numerelor întregi negative, simetric cu cel al numerelor întregi pozitive în raport de zero. Aşadar –ax - b = + ab, -ax + b = -ab. Numerele fracţionare negative apar imediat drept rezultate ale ecuaţiei generale ax + b = 0.

Putem, de asemenea, luând exemplul lui Bertrand Russell, să obţinem corpul numerelor fracţionare într-un mod logistic plecând de la conceptul „claselor de cupluri"; putem astfel clasifica toate numerele raţionale (întregi şi fracţionare) considerând fracţiile a/b care le reprezentau (*a* şi *b* fiind primi între ei, adică neavând divizor comun) şi numind fracţii de aceeaşi clasă pe cele pentru care (a + b) are aceeaşi valoare. De exemplu $2/3$, $3/2$, $1/4$, $4/1$ sunt de clasă cinci.

O clasă dată, a 131-a de pildă, nu va conţine decât un număr finit de fracţii şi orice număr raţional (inclusiv cele întregi) se găseşte într-o clasă, şi numai într-o clasă. Dacă în fiecare clasă dispunem fracţiile care îi aparţin în ordinea mărimii, vom avea de exemplu $1/4 , 2/3 , 3/2 , 4/1$ şi dacă scriem în continuare toate clasele unele după altele (despărţindu-le prin „punct şi virgulă"), obţinem:

$$\frac{0}{1}; \quad \frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{1}; \frac{1}{3}, \frac{3}{1}; \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}; \ldots$$

(desfiinţând repetiţiile).

Putem face această mulţime să corespundă biunivoc cu aceea a numerelor întregi; aceste două mulţimi au, aşadar, aceeaşi putere, acelaşi număr cardinal (partea, mulţimea de numere întregi, are acelaşi „număr” ca şi *întregul*, mulţime de numere raţionale).

Înainte să trecem mai departe, să ne oprim puţin în domeniul numerelor întregi, pentru a nota câteva teoreme sau rezultate ciudate atât prin sens, cât şi, uneori, prin ritmul formulelor care le exprimă. Am văzut deja că tot aşa cum:

$5^2 = 4^2 + 3^2$ sau $25 = 16 + 9$

avem $6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3$ sau $216 = 125 + 64 + 27$

(volumul cubului cu muchia egală cu 6 unităţi este egal cu suma volumelor a trei cuburi cu muchiile egale cu 5, 4, 3).

Şi $20^3 = 14^3 + 13^3 + 12^3 + 11^3$

Coloana pătratelor	*Coloana cuburilor*
$1 = 1 = 1^2$	$1 = 1^2 = 1$
$1 + 3 = 4 = 2^2$	$3 + 5 = 2^3 = 8$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$	$7 + 9 + 11 = 3^3 = 27$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$	$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 = 64$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$	$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3 = 125$
.....	.....
Al n-lea pătrat este egal cu suma primelor n numere impare.	Aici legea formării este mai subtilă. Al n-lea cub este egal cu suma a n numere impare care se termină cu $n(n+1)-1$, inclusiv.

Coloana numerelor triunghiulare	*Pătratele numerelor triunghiulare*
$0 + 1 = 1$	$1^3 = 1^2$
$1 + 2 = 3$	$1^3 + 2^3 = 3^2$
$1 + 2 + 3 = 6$	$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$
$1 + 2 + 3 + 4 = 10$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$
$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	$S^3 = S\,\frac{n = n_n^3}{n = 1} = T_n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Avem de asemenea:

$$S^1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{1.2}$$

T_n , al *n*-lea număr triunghiular

$$S^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

$$S^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + = Tn^2$$

$$S^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(2n^2+3n+1)}{30}$$

Printre teoremele referitoare la numerele întregi, să citäm „ultima teoremă a lui Fermat“ căreia Fermat pretindea că i-a găsit demonstraţia (de atunci nu a mai fost regăsită, dar teorema nu a fost infirmată): Expresia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluţie pentru un număr întreg n altul decât 2 (x, y şi n fiind numele întregi).

Teorema lui Lagrange: orice număr întreg poate fi exprimat prin suma a patru pătrate (0 şi 1 fiind socotite pătrate).

Orice număr întreg este egal cu suma a nouă cuburi întregi mai mari sau egale cu 0 (Wieferich).

Am vorbit într-un alt capitol despre triunghiurile diofantine, grupuri de 3 întregi reprezentând laturi ale triunghiurilor dreptunghice astfel încât $a^2 = b^2 + c^2$.

Să nu uităm numerele întregi perfecte, egale cu suma divizorilor sau submultiplilor lor, ca de exemplu:

$$6 = 1x\ 2x3 = 1+2+3$$
$$28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$$

apoi 496, 8128, 333550336, 8589869056.

Mai sunt cunoscute încă două.

Apoi numerele amicale, cum sunt 220 şi 284, deoarece:

220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142, suma divizorilor lui 284 şi

284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110, suma divizorilor lui 220.

Numerele prime (care nu au alt divizor decât 1) au, ca să zicem aşa, personalităţi aparte, iar analiza lor şi teoremele enunţate în legătură cu ele ar putea umple mai multe volume. Să citäm teorema

lui Gauss, ca exemplu al unei corelări între anumite numere prime şi geometria poligoanelor regulate:

Putem construi euclidian (cu rigla şi compasul) un poligon regulat cu n laturi (împărţind o circumferinţă în n părţi egale) atunci când (şi numai atunci când):

1° $n = 2^p$

2° n este un număr prim de forma $2^k + 1$. În acest caz, adică atunci când $2^k + 1$ este un număr prim, avem întotdeauna $K = 2^{2q}$, dar reciproca nu este adevărată, , $n = 2^{2q} + 1$ nu este întotdeauna un număr prim. De exemplu, n este prim pentru:

q = 0 (n = 3), q = 1 (n = 5), q = 2 (n = 17), q = 3 (n = 257), q = 4 (n = 65537),

dar nu pentru q = 5 sau 6, 7, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73.

3° Sau când n este un produs de factori diferiţi de aceste două tipuri 1° şi 2°, adică de forma $2^p \times (2^k + 1)(2^r + 1) \ldots$, $2^k + 1$, $2^r + 1$, fiind numere prime distincte; nonagonul (n = 9 = 3 x 3), poligonul cu 18 laturi (2 x 3 x 3), nu pot fi construite euclidian deoarece 3, deşi satisface condiţia 2°, ($3 = 2^1 + 1$), este repetat de două ori[44].

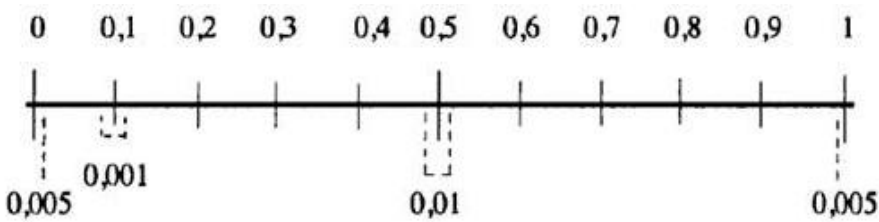
Din teorema lui Gauss rezultă că poligoanele regulate cu 3, 4, 5, 6, 8, 12, 15, 16, 17, 20, 24... laturi se pot construi euclidian (ca şi cele cu 257 şi 65537 laturi), dar nu cele cu 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 75 ... laturi. Poligonul regulat cu 257 de laturi a fost studiat şi construit (în 1832) de Richelet, poligonul regulat cu 65537 laturi a fost studiat de profesorul Hermes (cu nume predestinat) din Gottingen, care i-a închinat zece ani din viaţă şi a izbutit (în 1894) să-i facă construcţia; i-a fost, nădăjduiesc, gravată pe mormânt. Dragostea faţă de un număr sau de un poligon nu poate merge mai departe de atât!

În plus faţă de teoria numerelor prime şi adesea fecundată de ea, teoria generală a numerelor întregi s-a dizolvat după mai multe linii de cercetare originale, polinoame cu coeficienţi şi exponenţi întregi, modelele lui Kummer, modelele lui Dedekind etc. Nu mă voi opri asupra acestora, întrucât este vorba mai degrabă de simboluri decât de numere propriu-zise. Euclid dovedise deja că există un număr infinit de numere prime. Cebîşev a dovedit că dacă n este un număr întreg suficient de mare, există întotdeauna un număr prim între n şi 2n. Cel mai mare număr prim cunoscut este $2^{127} - 1$, care are 39 de cifre.

Să ne întoarcem la numerele raţionale, cele care cuprind numerele întregi şi numerele fracţionare raţionale. Cu toate că mulţimea numerelor raţionale (puncte M astfel încât lungimea OM să fie

măsurată printr-un număr raţional) în intervalul OA, segment dintr-o dreaptă oarecare, este *dens* şi *compact* (între două fracţii diferite $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ putem oricând intercala o fracţie $\frac{m+p}{n+q}$), această mulţime este departe de a umple intervalul; interstiţiile sunt în număr infinit şi depăşesc cu mult punctele care corespund numerelor raţionale (de fapt, după cum vom vedea mai departe, ele constituie un infinit „nenumărabil“ cu o putere mai mare, în transfinit, decât cea a mulţimii punctelor raţionale care este egală cu aceea a mulţimii „numărabile“ a numerelor întregi).

Emil Borel şi-a închipuit o demonstraţie ingenioasă a acestui paradox, unul dintre cele mai impresionante din numeroasele paradoxuri ale transfinitului. Să luăm un segment de dreaptă de 1 metru lungime, divizibil la infinit. Să însemnăm pe el punctele de diviziune din zece în zece decimetri



puncte ale căror abscise sunt 0,1; 0,2;... 0,9;1, şi să scoatem din jurul fiecăruia, de o parte şi de alta, o bucăţică din segmentul de 1 metru, fiecare cu dimensiunea de 0,01, astfel încât totalul să facă 0,1, adică un decimetru. Apoi, din jurul fiecărui punct de diviziune în centimetri, puncte ale căror abscise sunt 0,01 ...0,09;0,11;0,12;l ... 0,98;0,99 (neglijând punctele deja folosite), mai scoatem o bucăţică de 0,001 m astfel încât de data aceasta am scos în total un centimetru (0,01). Reîncepem cu milimetri, zecimi de milimetri şi aşa mai departe la nesfârşit. Ce va rămâne? Bunul simţ răspunde: nimic! Întrucât pe fiecare bucăţică din segment, oricât de mică ar fi, se va afla o infinitate (numărabilă) de puncte zecimale din fiecare din care s-a luat o bucată finită. Şi totuşi, totalul de

0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 ... etc. este de 0,111111 ... adică doar a noua parte dintr-un metru:

0,1
0,01
0,001
0,0001

.....
.....
_____

0,111111111111111

Cu alte cuvinte, au fost scoase toate punctele zecimale (adică toate punctele raţionale, care formează o mulţime densă decupând în jurul fiecăruia dintre ele o grosime finită, şi totuşi rămâne cel puţin 0,88888888 ... din lungimea iniţială a segmentului.

De asemenea am putea reduce porţiunea scoasă la 0,01 sau 0,001 din segmentul iniţial sau să o facem cât vrem de mică; ce a fost decupat ar fi la limită nul în raport cu ceea ce rămâne,.... şi totuşi nu rămâne nimic ... continuu: măsura mulţimii numerelor raţionale de pe acest segment de dreaptă este 0.

Într-o altă demonstraţie a acestui paradox, care arată şi faptul că probabilitatea ca un număr ales sau marcat la întâmplare pe dreaptă să fie raţional este nulă, putem lua mai întâi toate numerele raţionale mai mici decât 1 clasându-le după numitor:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\dots$$

şi adăugăm acestor puncte intervale pentru care aceste puncte sunt mijloace şi având, pe rând, ca lungime 0,1 - 0,01 - 0,001 - 0,0001 etc. suma lor fiind iarăşi egală cu 0,111111111 ... $\frac{1}{9}$.

Vom vedea explicaţia paradoxului când vom pătrunde în domeniul transfinitului şi vom aborda noţiunea de continuu.

Să nu uităm până atunci câteva convenţii suplimentare despre exponenţi (indici de putere sau de grad, ca n în a^n), care simplifică în mare măsură mânuirea expresiilor algebrice sau transcendente evitând incoerenţele şi contradicţiile.

Spunem de exemplu că:

$$a^0 = 1\ ;\ a^{-1} = \frac{1}{a}\ ;\ a^{-3} = \frac{1}{a^3}\ ;\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Fracţii zecimale

Practica ne spune că, în general, în sistemul nostru de numeraţie zecimală, o fracţie se poate reprezenta în două feluri:

$\frac{3}{5}$ echivalează cu 0,6 (câtul lui 3 împărţit la 5)

$\frac{5}{6}$ cu 0,8333...

$\frac{7}{8}$ cu 0,875

Fracţiile zecimale pot fi limitate (ca 0,6 sau 0,875), sau nelimitate; în acest caz ele sunt (fracţiile raţionale) întotdeauna periodice, cum este 0,83333 ... (de altfel aici perioada, cifra 3, este precedată de un element detaşat, 8). Orice fracţie raţională poate, aşadar, să fie reprezentată de o fracţie zecimală cuprinzând (după virgulă, dacă fracţia este mai mică decât 1) o parte zecimală simplă sau o parte zecimală periodică nelimitată simplă sau mixtă (având înaintea perioadei una sau mai multe cifre care nu fac parte din ea).

În general, fracţiile zecimale periodice sunt progresii geometrice deghizate:

$$0{,}363636\ldots\ [\text{simbol: } 0{,}(36)] = \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000}$$

O fracţie limitată poate fi considerată fracţie periodică cu perioada zero.

Atunci: orice număr raţional poate fi reprezentat într-un singur fel printr-o fracţie zecimală periodică şi, reciproc, orice fracţie zecimală periodică reprezintă un număr raţional.

Pentru fracţiile zecimale periodice simple, metoda de transformare a fracţiei zecimale este următoarea:

$$0,\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}{9\ldots9\,(de\ n\ ori)}$$

Pentru fracţiile mixte procesul este ceva mai complicat; avem, de exemplu, de transformat 3,2363636 = 3,2 (36) în fracţie ordinară. Considerăm 3236 un număr întreg din care scădem 32 (parte nerecurentă) rămânându-ne 3204, şi îl luăm pe 3204 ca numărător al unei fracţii al cărei numitor este alcătuit din tot atâtea 9 câte cifre sunt în perioadă (aici 2) şi din tot atâţi 0 în continuare câte cifre sunt

$\frac{3204}{990}$

între perioadă şi virgulă (aici 1), deci

Ne putem întreba dacă există fracţii zecimale care nu Corespund unor fracţii raţionale. Răspunsul este afirmativ; ele există într-adevăr, sunt nelimitate însă neperiodice şi corespund numerelor iraţionale şi incomensurabile despre care vom vorbi în capitolul următor.

CAPITOLUL X

NUMERE IRAŢIONALE-NUMERE ALGEBRICE ŞI TRANSCENDENTE-NUMERE REALE ŞI IMAGINARE- CÂTEVA NUMERE REMARCABILE - NUMERE ŞI DIMENSIUNI-NUMERELE TRANSFINITE ALE LUI CANTOR

„Matematica este clasa tuturor propoziţiilor de forma „p implică q“, în care p şi q sunt propoziţii.”

Primele numere iraţionale care ne vin în minte sunt cele care îi nedumereau deja pe matematicienii greci şi care apar, cel puţin simbolic, atunci când vrem să obţinem rădăcina pătrată a unui număr întreg care nu este un pătrat perfect. De exemplu, rădăcina pătrată din 2, sau $\sqrt{2}$, numărul care înmulţit cu el însuşi dă 2, şi de care s-au poticnit grecii încercând să calculeze diagonala pătratului. Exprimaţi în fracţii zecimale, radicalii de gradul 2 (ca şi cei de orice grad) produc fracţii zecimale nelimitate neperiodice. Ei intră în categoria mai generală a numerelor algebrice, adică a numerelor care pot fi rădăcinile unei ecuaţii algebrice $ax^n + bx^{n"1} + ... + px + q = 0$ al cărui prim membru este un polinom întreg în x cu coeficienţi raţionali şi exponenţi întregi. Dar, deşi orice număr algebric ca rădăcină a unei ecuaţii de gradul doi poate fi scris sub forma unei combinaţii de radicali de gradul doi (de fapt $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ pentru rădăcinile ecuaţiei normale $ax^2 + bx + c = 0$), deşi rădăcinile ecuaţiei generale de gradul trei se pot reprezenta prin radicali de gradul doi şi trei şi deşi cele ale ecuaţiei generale de gradul patru se pot reprezenta prin radicali de gradul patru sau de gradul doi, analogia se opreşte aici: ecuaţia generală de gradul cinci nu poate fi rezolvată în radicali, chiar dacă sunt de gradul cinci sau de orice alt grad. Acest lucru a fost dovedit de Abel; Galois a demonstrat că situaţia este aceeaşi pentru orice ecuaţie de un grad mai mare de cinci. Există, aşadar, şiruri de numere algebrice iraţionale radicale euclidiene (exprimate în radicali de gradul II), cum este $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ numere algebrice iraţionale neeuclidiene (radicali de un ordin mai mare decât 2, cum sunt $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[2]{4\sqrt[3]{5}}$) şi în sfârşit numere algebrice iraţionale pe care le-am putea numi *iradicali*, care nu se pot exprima sub forma unor

combinaţii de radicali în număr finit, cum sunt rădăcinile ecuaţiilor de un grad mai mare decât gradul patru. Deşi netranscendente (le vom întâlni şi pe acestea neîntârziat) şi algebrice prin definiţie, aceste numere nu pot, în general, să fie figurate prin nici o combinaţie de simboluri algebrice exprimând un număr finit de operaţii.

Totuşi, datorită geniului lui Galois, ecuaţiile ale căror rădăcini sunt aceste numere pot fi rezolvate prin teoria grupurilor de substituţii. Repet, ele formează o parte din mulţimea numerelor algebrice. Această mulţime are, printre altele, proprietatea de a avea aceeaşi putere, acelaşi număr cardinal ca şi mulţimea numerelor întregi naturale şi, de asemenea, proprietatea generală a mulţimilor transfinite de a putea fi egală (ca număr, aşadar, ca putere) cu una din părţile sale. Cantor şi-a închipuit o demonstraţie originală a acestei proprietăţi a mulţimii numerelor algebrice de a fi echivalentă cu mulţimea numerelor naturale (de a fi un infinit numărabil, asemeni numerelor raţionale fracţionare şi întregi, sau mulţimii numerelor-puncte raţionale între 0 şi 1 pe o dreaptă). Anticipez aici, aşadar, capitolul transfinitului; iată demonstraţia lui Cantor:

El clasează în fiecare caz ecuaţiile algebrice după valoarea sumei 2 a valorilor absolute (pozitive sau făcute pozitive) ale coeficienţilor termenilor ecuaţiei; de exemplu, pentru ecuaţia suma $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 13x + 4 = 0$ va fi aşezată în a 23-a căsuţă ($1 + 3 + 2 + 13 + 4 = 23$) din rândul al cincilea (gradul cinci). în fiecare căsuţă putem clasa ecuaţiile într-o ordine asemănătoare, de pildă, cu aşezarea cuvintelor într-un dicţionar, după mărimea crescătoare a coeficienţilor. Putem concepe acum ca fiind scrise dedesubtul fiecărei ecuaţii rădăcinile sale reale (sunt şi rădăcini „imaginare" care arată numerele imaginare despre care nu am vorbit până acum), care sunt în număr finit (egal, în plus, cu gradul ecuaţiei), şi obţinem astfel un şir numărabil de numere, deoarece le putem pune în corespondenţă univocă şi reciprocă cu şirul numerelor naturale. Asemenea numerelor raţionale, chiar şi numerele algebrice neraţionale se pot scrie sub forma unor fracţii zecimale, însă partea zecimală nu va fi periodică, adică dacă este nelimitată cifrele ei vor fi într-o ordine oarecare fără nici o lege de repetiţie (proprietate care aparţine şi numerelor transcendente pe care nu le-am prezentat încă). în ceea ce priveşte numerele algebrice raţionale, care sunt rădăcinile unor ecuaţii de gradul întâi, de tipul $ax + b = 0$, ele furnizează în mod firesc fracţii zecimale periodice său limitate.

Una dintre proprietăţile numerelor algebrice euclidiene (de gradul II) este aceea de a putea fi scrisă sub forma unei fracţii continue; un exemplu ne va arăta îndată semnificaţia acestui ultim termen.

Am văzut că după o teoremă a lui Nathan Altshiller-Court (de la Universitatea din Oklahoma) rădăcina negativă a ecuaţiei de gradul

doi $x^2 – x - a = 0$,

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$$

Este egală în valoare absolută cu:

Limită $\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{\cdots}}}}$

Aceasta este o fracţie continuă periodică continuată nedefinit, în care a poate avea orice valoare întreagă. Rădăcina pozitivă este:

$$x_1 = \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a\ldots}}}}$$

Această teoremă a lui Altshiller-Court duce la următorul rezultat neaşteptat:

Pentru $a = 2$

$x^2 - x - 2 = 0$;

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2\,;\; x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

şi avem:

$2 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\ldots}}}}$

Şi:

$1 = \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cdots}}}}$

Calculând valoarea funcţiei continue după fiecare 2, obţinem

„redusele” $\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{6}{5}, \frac{10}{11}, \frac{22}{23}, \frac{42}{43} \cdots$ care oscilează în jurul valorii 1 de care se apropie asimptotic.

Pentru Secţiunea de Aur, teorema lui Altshiller-Court ne-a dat, plecând de la $x^2 = x + 1$

$$x_1 = \emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1}{\emptyset} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\emptyset = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}$$

Şi

$$\frac{1}{\emptyset} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Aici redusele fracţiei continue sunt fracţiile:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55},$$

în care regăsim două şiruri ale lui Fibonacci paralele.

Încă o dată, aceste relaţii extraordinar de strânse dintre proporţia

Secţiunii de Aur sau numărul $\emptyset$ şi unitate, monada, explică în oarecare măsură, lăsând orice mistică la o parte, de ce acest număr are proprietăţi atât algebrice, cât şi geometrice unice. Printre numerele geometrice, este cu siguranţă numărul, invariantul cel mai remarcabil.

Chiar dacă adăugăm numerelor întregi şi raţionale toate numerele algebrice, euclidiene, neeuclidiene radicale şi neradicale, suntem departe de a fi epuizat şirul numerelor care reprezintă, de pildă, toate punctele posibile de pe o linie dreaptă OA, ale continuului liniar. Să reluăm exemplul dat de Borel: scoţând de pe un segment de dreaptă OA egal cu un metru toate numerele raţionale, apoi toate numerele algebrice (ceea ce reprezintă, de asemenea, o infinitate numărabilă), încă mai rămâne pe segmentul OA un număr de puncte care reprezintă nu numai o infinitate, ci şi o infinitate „nenumărabilă“, adică al cărei raport între numerele scoase şi cele care rămân să fie zero. Raportul între puterea unui transfinit numărabil şi cea a unui transfinit nenumărabil este într-adevăr 0, asemenea celui dintre puterea unei mulţimi finite şi cea a unei mulţimi transfinite numărabile.

Mulţimea tuturor punctelor de pe un segment de dreaptă finit sau prelungit la infinit se numeşte mulţimea continuului; faptul că această mulţime de puncte pe dreapta trasată, vizibilă, corespunde în acest fel riguros mulţimii tuturor numerelor imaginabile între 0 şi 1, de exemplu, este un câştig remarcabil al intuiţiei noastre; este vorba de continuul cel mai logic, cel mai apropiat de înţelegerea noastră, cel care este definit de principiul lui Arhimede, despre care vom vorbi mai departe. Avem, aşadar, mulţimea continuului egală cu mulţimea tuturor numerelor *reale;* această denumire cuprinde toate numerele normale posibile, imaginabile, în afara numerelor *imaginare*, anormale dacă vreţi, întrucât existenţa lor chiar abstractă este întemeiată pe un punct de plecare contradictoriu. Cu toate acestea, închipuirea omenească este atât de puternică încât numerele imaginare, pe care le vom defini ceva mai departe, par că într-adevăr există în vreun fel oarecare, într-o lume în afara lumii noastre dar atingând-o uneori, precum lumile neeuclidiene, nearistotelice, chiar lumea nearhimedică cu care tocmai l-am ameninţat pe cititor. Mulţimea numerelor reale, ale cărei abscise formează continuul liniar, cuprinde aşadar în afara numerelor raţionale (care la rândul lor cuprind numerele naturale sau întregi şi numerele fracţionare), toate numerele algebrice şi unele numere care nu sunt nici raţionale, nici algebrice, care nu sunt deci rădăcini ale vreunei ecuaţii algebrice cu coeficienţi raţionali şi cu exponenţi întregi. Aceste numere sunt numite transcendente. Ca exemple de numere transcendente remarcabile le voi numi pe π (raportul invariabil între circumferinţa şi diametrul unui arc oarecare) şi pe

$$e = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Orice număr real poate fi reprezentat printr-un şir nesfârşit de numere întregi scrise ca fracţie zecimală; în cazul numerelor transcendente (ca şi în cel al numerelor algebrice iraţionale), fracţia nu va fi periodică. La fel, orice şir, infinit sau nu, de numere raţionale (sau de numere întregi) poate reprezenta un număr real. Să citäm aici „tăieturile" lui Dedekind, numere iraţionale imaginate ca două şiruri nesfârşite care se întâlnesc. $\sqrt{2}$ va fi, spre exemplu, punctul de întâlnire, „tăietura" a două şiruri, cel al tuturor numerelor pozitive raţionale al căror pătrat este mai mare decât 2 şi cel al tuturor celorlalte numere raţionale. Mai general: orice lege oarecare de succesiune a numitorilor unei fracţii continue sau a zecimalelor unui număr zecimal va reprezenta întotdeauna un număr real, iar reciproca este, de asemenea, adevărată. Fracţiile ordinare sunt considerate nişte cazuri particulare ale fracţiilor continue. Sau altfel: numerele reale dintre 0 şi 1 se pot obţine scriind, începând de la 0, şiruri nelimitate de cifre care se succed într-un fel oarecare. Să menţionäm aici, anticipând încă o dată prezentarea oficială a numerelor transfinite (aceste contacte preliminare ne vor familiariza cu caracterul lor ciudat), o proprietate paradoxală care subliniază legătura logică dintre mulţimile numerelor finite, mulţimile transfinite şi spaţiile geometrice: numărul total al punctelor reale de pe un segment de dreaptă este egal ca putere (sau număr cardinal) cu numărul punctelor de pe dreapta obţinută prelungind la nesfârşit segmentul dat într-o parte şi în cealaltă. Acest număr corespunde nu numai mulţimii tuturor numerelor reale, ci şi continuului geometric sau „Marele continuu". După cum am văzut deja, punctele reale corespund biunivoc numerelor reale. Dar (şi avem aici un nou paradox al infinitului) acest număr al tuturor punctelor de pe o dreaptă, al continuului cu o dimensiune, este egal cu numărul tuturor punctelor dintr-un plan oarecare (continuu cu două dimensiuni) şi cu numărul tuturor punctelor din spaţiu (continuu cu trei dimensiuni) şi acest lucru rămâne adevărat pentru un continuu cu un număr oarecare de dimensiuni. De exemplu, dacă 0, a, b, c,... j reprezintă primele nouă numere şi zero, grila

0, a c d i j ....
0, j a d i b ....
0, d b c f g ...
.....
.....
.....

dezvoltată la nesfârşit prin scrierea cifrelor la întâmplare (fără lege periodică) va putea da, în teorie, toate numerele reale. „Grila continuului" se poate rândui într-o „mulţime *bine ordonată”* având „puterea continuului", al doilea număr din şirul numerelor cardinale transfinite (a se vedea mai jos). Acest continuu geometric care cuprinde toate punctele de pe o dreaptă, dintr-un plan sau dintr-un spaţiu cu trei dimensiuni se mai numeşte şi „continuu arhimedic“, întrucât ascultă de principiul lui Arhimede sau axioma continuului.

Iat-o pentru un continuu liniar: dacă A şi B sunt două puncte pe o dreaptă oarecare, iar A_1 un punct intermediar, putem întotdeauna să repetăm segmentul AA_1 de un număr destul de mare de ori, n, astfel încât AA_n să fie dincolo de B (AB fiind segmentul finit oarecare, $AA_n = n \times AA_1$ AA{). Sau, dacă a şi b sunt două numere reale oarecare, cu b > a, putem găsi întotdeauna un număr întreg n, astfel încât np > b - a, p fiind un alt număr întreg oarecare.

Geometria uzuală este arhimedică, însă putem concepe numere şi spaţii nearhimedice. Cât despre geometriile neeuclidiene şi multidimensionale, ne-am obişnuit deja cu ideea că spaţiul nostru este un spaţiu-timp riemanian (neecludian) cu patru dimensiuni.

Să mai introducem câteva noţiuni care ţin mai degrabă de teoria transfinitului, însă cititorul a putut constata că transfinitul pătrunde peste tot în teoria modernă a numerelor. Tot aşa cum putem ordona după mărime numerele naturale, raţionale şi algebrice, tot aşa printr-un act al minţii putem să dispunem o mulţime infinită de numere reale după mărime (datorită „grilei continuului"); mulţimea numerelor reale este nu doar *ordonată*, ci şi *bine ordonată*. Zicem că o mulţime E este *bine ordonată* dacă, fiind dată una din submulţimile sale ordonate E’, în E’ se află un element a situat înaintea tuturor celorlalte elemente ale lui E’ Nu este cazul pentru mulţimea ordonată a numerelor raţionale rânduite în ordinea mărimii, dar această mulţime poate fi la fel de bine ordonată alegând o altă lege de succesiune[45].

L-am menţionat deja pe π (raportul dintre circumferinţă şi diametru):

$\pi = 3{,}141592265\ldots$ **1**

1 Calculatorul
zecimale în 70 de o
2

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

şi pe 2,718281828 ...

ca fiind numerele transcendente cele mai remarcabile şi desigur cele mai cunoscute. Iată câteva formule care arată în ce fel se pot exprima aceste două numere ca serii convergente sau în fracţii continue:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \ldots + \frac{1}{n!} \ldots$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 \ldots}}}}}}}}$$

$$\pi = \frac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \ldots}{3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 9^2 \ldots}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 \ldots}}}}$$

Hermitte şi Lindeman au fost primii care au dovedit că π şi e sunt transcendente. Lindeman a găsit o metodă pentru a genera numere transcendente în serii nelimitate.

S-a demonstrat că dacă α şi β sunt două numere algebrice, atunci $\alpha\beta$ este transcendent, în afară de cazul când a este egal cu 0 sau cu 1, sau când β este raţional. în particular $2^{\sqrt{2}}$ este transcendent.

Din faptul că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă, în timp ce aceea a numerelor algebrice este, rezultă că mulţimea numerelor transcendente nu este numărabilă.

Înainte să mă despart de numerele finite îmi mai rămâne să menţionez numerele aşa-numite *imaginare*. Ele alcătuiesc unul din domeniile cele mai bizare, ca definiţie însăşi, ale ştiinţei matematice. Căci după ce am stabilit ca axiome de nezdruncinat faptul că produsul dintre un număr negativ şi unul pozitiv este negativ (a)x(-b) = -ab), dar că produsul a două numere negative este pozitiv (-a)x(-b) = +ab), algebra introduce cu seninătate numărul al cărui produs cu el însuşi este -1 şi-i conferă simbolul $\sqrt{-1}$. Şi toate acestea admiţând că numărul i = $\sqrt{-1}$ este imposibil şi dându-i calificativul de imaginar.

Acest fapt nu i-a împiedicat pe matematicieni să pună, plini de zel, bazele unei algebre a acestor numere imaginare simple (a$\sqrt{-1}$) sau complexe (a + b$\sqrt{-1}$), a acestor numere care nu există nici logic, nici virtual, apoi ale unei geometrii aferente. Pe urmă s-a întâmplat ceva curios care pare să demonstreze că cele mai ciudate concepţii ieşite din creierul omenesc par să corespundă întotdeauna unei realităţi, unui domeniu tăinuit al lumii exterioare. S-a observat că algebra şi geometria (diagramele lui Argand) imaginarelor se aplică într-un fel ciudat, în mod direct, elementelor teoriei şi practicii curenţilor alternativi, iar datorită diagramelor imaginare se pot calcula, calibra, controla cu uşurinţă maşinării la fel de concrete cum ar fi statoarele alternatoarelor sau transformatoarelor. Ca terminologie se preferă acum calificativul „*complex*" (în realitate un număr mixt, a ± b$\sqrt{-1}$, pe jumătate real şi imaginar). în teoria ecuaţiilor algebrice, rădăcinile imaginare sau complexe (se găsesc din belşug chiar în ecuaţiile de gradul al II-lea) cer să fie luate la fel de serios în considerare ca şi rădăcinile reale.

Rădăcina pătrată din minus unu, $\sqrt{-1}$, primul număr imaginar, este exprimată deseori prin simbolul *i*. Iată, de exemplu, diferitele

valori ale puterii lui $i = \sqrt{-1}$ aşa cum apar în ecuaţii de un grad mai mare decât cel al lui $x^2 + 1 = 0$;

$i = \sqrt{-1} = i$	$i^2 = -1$	$i^8 = -i$	$i^4 = 1$
$i^5 = i$	$i^6 = -1$	$i^7 = -i$	$i^8 = -1$
$i^9 = i$	$i^{10} = -1$	$i^{11} = -i$	$i^{12} = 1$

Convenţiile relative la exponenţii aritmeticii numerelor întregi:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a \qquad a \times a = a^2 \qquad \overbrace{a \times a \times a \ldots \times a}^{\text{n ori}} = a^n$$

$$a^m \times a^m = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn}$$

sunt generalizate şi se aplică numerelor reale:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \; ; \; x^{-m} = \frac{1}{x^m} \; ; \; x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$$

$$x^{\frac{m}{n}} \times x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = x^{\frac{mq+pn}{nq}}$$

Numărul imaginar *i* şi cele două numere transcendente π şi *e* sunt legate de unitate prin ecuaţia simplă: $1 + e^{i\pi} = 0$

Iată câteva „numere mari“ finite:
$9^9 = 387\,420\,489$; $(9^9)^9 = 9^{81}$

Dar cel mai mare număr cu trei cifre care se poate scrie este: $9^{(9^9)} = 9^{387420489}$ care are 309693100 de cifre.

$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ este doar 362 880; acesta este numărul care arată în câte feluri diferite pot fi aşezate nouă persoane la o masă.

$10!$ este 3628800 şi 10^{10} este 10.000.000.000

Numărul de particule din Univers (calculat de Eddington), 2×10^{79} (electroni + protoni), nu are decât 80 de cifre.

Cel mai mare număr prim cunoscut $2^{127} - 1$ nu are decât 39 de cifre.

Exemple de creştere vertiginoasă dată de funcţia exponenţială y = e^x

Pentru x = 0 y = 1 cm
x = 1 y = 2,7 cm
x = 2 y = 1,5 m
x = 5 y = 220 m
x = 10 y = 4800 km
x = 20 y = $9{,}5 \times 10^{12}$ km

Expresiile transcendente exponenţiale cum sunt $m^{x^{\frac{1}{2}}}$ se calculează uşor prin logaritmi. Nu voi aminti decât definiţia logaritmilor:

Dacă y = a^x , *x* este logaritmul în bază a al lui y.

Recent, un matematician a propus ca unitate pentru numerele foarte mari *Gogolul*.

Un Gogol este egal cu 10^{100} (unitatea urmată de 100 de zerouri)

Şi un *Gogol complex* este egal cu $10^{10^{100}}$ care va face faţă vreme îndelungată tuturor nevoilor noastre.

Unităţile de măsură pentru dimensiunile mici, după centimetru, care este unitatea etalon C.G.S. (sistemul centimetru, gram, secundă) sunt:

micronul $\mu = \frac{1\,mm}{1000} m = 10^{-6}\, m$

milimicronul $\mu\mu = \frac{1\mu}{1000} = 10^{-9}\, m$

angstromul Å = $1^{-10}\, m = 10^{-8}\, cm = \frac{1\mu\mu}{10} = \frac{1\mu}{10000}$

unitatea X = $\frac{1Å}{1000}$

Pentru distanţe mari:

Un an lumină = 10.000 miliarde de km

Sau

$3156 \times 10^7 \times 3000\, km\ sau\ 6 \times 10^{12}\, mile$.

Parsecul este de vreo trei ori mai mare:

$= 308 \times 10^{13}\ km$

Megaparsecul = 3,26 milioane de ani lumină.

Diametrul Căii Lactee este de aproximativ 100.000 de ani lumină. Galaxia cea mai apropiată s-ar afla la 1.000.000 de ani lumină.

Telescopul cu oglindă de pe muntele Palomar permite acum să se observe galaxii care se află la o distanţă de 360.000.000 de ani lumină.

Se ştie că de când Einstein a introdus ipoteza unui Univers finit, savanţii au încercat să măsoare dimensiunile Universului presupus eliptic sau sferic.

Hubble socotise că raza Universului ar fi de 88.000 de milioane de ani lumină (8,5 x 10^{28} cm); alte ipoteze o consideră între 1750 ÷ 5000 de milioane de ani lumină. Probabilitatea unui Univers finit nu este întrutotul dovedită, însă se potriveşte cu cea a Universului în expansiune sugerată de deplasarea către roşu a liniilor spectrului în cazul nebuloaselor îndepărtate. Observaţiile recente de la Palomar confirmă această deplasare, ca şi proporţionalitatea distanţelor cu viteza nebuloaselor; deplasarea însăşi ar fi un efect optic Doppler-Fizeau analog cu efectul acustic cunoscut (variaţia înălţimii percepute a sunetului unei sirene de locomotivă care se deplasează cu mare viteză). Dacă se calculează la ce depărtate viteza nebuloaselor supuse expansiunii atinge viteza luminii, se găseşte pentru această distanţă cifra de 1.750 milioane de ani lumină. Această cifră, mult mai modestă decât cele pe care le-am amintit mai sus, ar fi, după de Sitter, o limită superioară a razei posibile a Universului. Ar fi nedrept pentru memoria pitagoreicilor şi neoplatonicienilor să nu menţionăm că pentru ei Universul era limitat, cuprins în „Sfera stelelor fixe“: sufletele preafericiţilor se regăseau în Calea Lactee.

Dacă trecem de la distanţele mari la cele foarte mici care apar în lumea atomică şi infraatomică, avem:

raza atomului (1942) este de 10^{-8} cm.

diametrul electronului este de $\frac{1}{100.000}$, din cel al celui mai mic atom = 10^{-13} cm.

Raportul între diametrul atomului si cel al nucleului său este de 10.000.

Diametrul nucleului atomului variază de la 10^{-16} cm la 10^{-17} cm.

Alte măsuri mai precise:

Diametrul electronilor planetari $3,2 \times 10^{-13}$ cm.

Diametrul nucleului atomului de hidrogen 2×10^{-16} cm.

Diametrul nucleului atomului de aur 2×10^{-12} cm.

Diametrul nucleului atomului de argint $1,27 \times 10^{-12}$ cm.

Diametrul nucleului atomului de uraniu $1,4 \times 10^{-11}$ cm.

Diametrul atomului de uraniu 5×10^{-8} cm.

O revistă englezească a publicat o scară ingenioasă a dimensiunilor biologice comparate, de la aproape infinit de mic până la colosal; la cele două extremităţi se găsesc de o parte un copac, sequoia gigantic, din California, şi de cealaltă virusurile filtrante percepute doar cu ajutorul microscopului electronic. Dacă ne referim la animalele propriu-zise avem de o parte balena albă de 115 tone şi de cealaltă parte cel mai mic animal monocelular autonom (neparazit), *Monas*. Punctul zero al acestei scări l-ar constitui furnica uriaşă (sau musca), care cântăreşte 1g, depărtată de cele două extreme cu 10^{10}. Ovulul uman se află la 10^5 sub 0. Cel mai mare animal monocelular care a existat vreodată aparţinea ordinului Numuliţilor (foraminifere fosile); interiorul oului de *Aypiornis* (pasăre uriaşă din Madagascar), care cântărea până la 5 kg era o entitate monocelulară vie, însă mai degrabă un parazit decât un animal propriu-zis.

Putem adăuga la cele două extremităţi ale scării două mase neaparţinând lumii vii depărtate fiecare la 10^{28} de zero (furnica): globul terestru şi electronul.

NUMERELE TRANSFINITE

Datorită anumitor pasaje din capitolele precedente, introducerea cu întârziere a numerelor transfinite nu-1 va mai surprinde pe cititor; el a întâlnit deja anumite proprietăţi paradoxale din această secţiune a societăţii Numerelor, între altele aceea că pot fi egale cu una din părţile lor. Am văzut, de asemenea, că dacă abordăm teoria numerelor, sau mai degrabă concepţia de număr, cu ajutorul teoriei mulţimilor şi al noţiunii de echivalenţă a două mulţimi (corespondenţa univocă şi reciprocă a elementelor lor) şi dacă trecem de la această echivalenţă la noţiunea de putere şi de număr cardinal, numerele naturale, numerele finite ordinare, se prezintă ca nişte cazuri particulare ale unor mulţimi infinite, caracteristica principală a acestor mulţimi infinite fiind aceea pe care am amintit-o: în împărăţia transfinitului partea poate fi egală cu întregul, ceea ce nu este cazul pentru numerele sau mulţimile finite.

Am identificat deja un anumit număr de mulţimi finite ale căror puteri sunt echivalente cu aceea a mulţimii numerelor naturale; de exemplu, mulţimea numerelor raţionale (întregi şi fracţionare) şi mulţimea numerelor algebrice. Aceasta cuprinde, în afară de mulţimea numerelor raţionale, (numere algebrice de gradul întâi), pe cea a numerelor algebrice care pot fi exprimate prin radicali şi pe cea a celorlalte numere algebrice, rădăcini ale ecuaţiilor de gradul cinci sau de grade mai mari decât cinci, care nu pot fi exprimate prin combinaţii de radicali. Toate aceste mulţimi (şi sumele lor) sunt numărabile şi echivalente, au acelaşi număr cardinal, cel mai mic număr cardinal transfinit, care este simbolizat de N_o sau Aleph Zero.

Am mai constatat până acum, cu oarecare surpriză, că numărul punctelor raţionale de pe un segment de dreaptă, chiar dacă acestea sunt dense, nu numai că nu epuizează numărul total de puncte de pe această dreaptă, dar au chiar şi o „măsură" nulă în raport cu acest număr total care se numeşte mulţimea numerelor reale şi conţine toate numerele transcendente. Această ultimă mulţime este deci de un ordin de mărime superior celei a numerelor întregi, raţionale sau algebrice (am văzut că mulţimea numerelor algebrice este numărabilă) şi va avea ca putere sau număr cardinal un număr mai mare decât N_0; acesta este continuul arhimedic definit mai înainte şi îl putem simboliza provizoriu prin C.

C corespunde aşadar ca putere tipului de mulţimi numărabile echivalente cu puterea continuului.

Pe de o parte, teoria mulţimilor şi a operaţiilor care se pot efectua cu ele, stabilită de Cantor, combinată cu teoria generală a

permutărilor şi a combinărilor, ne arată întâi de toate că în timp ce N_0^2, cea de-a doua putere a infinitului numărabil sau N_0^n, sunt tot numere transfinite de tipul numărabil, 2^{N_0} dimpotrivă, număr al submulţimilor lui N_0 sau al tuturor combinărilor de N_0 obiecte luate câte două este un infinit dintr-o clasă superioară lui N_0, un infinit nenu- mărabil pe care-1 vom numi al doilea număr transfinit cardinal, N_l.

Cantor a generalizat prin recurenţă $2^{N_0} = N_l$ în $2^{N_{n-1}} = N_n$, n putând lua pe rând toate valorile întregi, iar N_n fiind întotdeauna de o putere mai mare decât cea lui $N_{n\,l}$.

Aceasta dă scara crescătoare a numerelor cardinale transfinite, ivită pe cale iterativă şi care nu face decât să traducă faptul că numărul submulţimilor unei mulţimi este de un ordin de mărime mai mare decât cel al mulţimii. Aici, cititorul ar putea avea impresia că fără să-l avertizez îl fac să intre în domeniul, încă nemenţionat, al teoriei grupurilor; este într-adevăr vorba mai degrabă de teoria combinărilor şi de întrepătrunderea acestor domenii variate; este cu neputinţă să păstrăm etanşă compartimentarea lor sau măcar să le prezentăm la locul pe care li-1 acordă logica sau pur şi simplu vechimea.

În timp ce N_0^3 defineşte mulţimea tuturor aranjamentelor de N_0 numere (de exemplu numerele naturale sau numerele algebrice) luate câte 3, mulţime care este încă numărabilă, dimpotrivă 3^{N_0}, mulţime a tuturor aranjamentelor cu repetiţie de trei litere N_0 câte N_0 are o putere mai mare decât N_0, de fapt aceeaşi pentru N_l decât 2^{N_0}. Avem $2^{N_0} = 3^{N_0} = n^{N_0}$ şi chiar N^{N_0}. Este ispititor şi logic să presupui că cele două numere transfinite nenumărabile pe care le-am obţinut, adică 2^{N_0} şi C (puterea continuului) sunt identice, adică au aceeaşi putere, 2^{N_0} sau $N_l = C$.

Aceasta este ipoteza continuului, excesiv de logică, foarte probabilă, dar nedovedită riguros, deşi Francis Warrain o prezintă ca incontestabilă. în orice caz, până acum nu a suferit nici o contrazicere şi o putem accepta sub beneficiu de inventar. N_l ar fi atunci (ca „putere a continuului") puterea mulţimii tuturor punctelor de pe o dreaptă, din plan sau din spaţiu, a tuturor numerelor transcendente, a

tuturor numerelor reale.

$N_2 = 2^{N_1}$, numărul următor pe scara transfinitului, este în acest caz puterea mulţimii submulţimilor tuturor numerelor reale. Este, de asemenea, puterea mulţimii tuturor funcţiilor discontinue.

Începând cu N_2, numerele transfinite cardinale sau *Aleph* plutesc prea sus în abstracţie pentru a îngădui să fie identificate sau descrise altfel decât prin legea iterativă a puterilor lor succesive sau a celor ale mulţimilor de submulţimi aferente. O să lăsăm, aşadar, deoparte cohortele numerelor cardinale şi cascadele lor ritmate pentru a trece la categoria rivală, aceea a numerelor ordinale transfinite. Voi aminti mai întâi cititorului că în domeniul numerelor finite distincţia între numerele cardinale şi cele ordinale nu este fundamentală; cu acelaşi număr 10 putem desemna rezultatul enumerării a zece obiecte, constând în a lua de fiecare dată un obiect până la epuizarea mulţimii, decontul sau numărul ordinal, şi caracteristica 10 a mulţimii care îl deosebeşte de o mulţime de unsprezece sau douăsprezece obiecte, puterea lui sau numărul cardinal. Dimpotrivă, pentru mulţimile transfinite o mulţime cu un număr cardinal dat poate fi aranjată, „ordonată", în mai multe feluri diferite, corespunzând fiecare unui alt tip de ordine sau număr ordinal. Aici are importanţă „tipul de ordine"; putem, de pildă, rândui şirul numerelor întregi după creşterea lor naturală 1, 2, 3, 4, 5 sau putem începe cu numerele impare, sau cu numerele pătrate etc.

Aceste tipuri de ordine constau totdeauna în diverse feluri de a ordona mulţimile care au un număr cardinal permanent. Numerele ordinale de prima clasă sunt numere ordinale finite reprezentate de aceleaşi cifre ca numerele cardinale, şirul numerelor naturale.

l, 2, 3, 4, 5 ... n, ...

Această mulţime considerată ca fiind completată cu toate numerele întregi ordonate după mărimea crescătoare (mulţimea numărului cardinal N_0) are ca tip de ordine sau număr ordinal simbolul ω, primul număr ordinal transfinit. Mulţimea numerelor întregi, ca şi aceea a restului numerelor raţionale sau a numerelor algebrice, se poate ordona în diferite feluri, poate produce un număr *infinit* de tipuri de ordine sau numere ordinale, pe care le putem grupa în numere ordinale de clasa a doua.

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots \omega - n, \ldots \omega - \omega = \omega \times 2, \omega \times 2 + 1, \ldots \omega \times 3, \ldots \omega \times n, \omega \times \omega = \omega^2.$$

$\omega^2 + 1, \ldots, \omega^2 + \omega, \omega^2 + \omega + 1, \ldots \omega^2 + \omega \times 2, \ldots \omega^2 + \omega \times \omega - \omega^2 \times 2, \ldots \omega^2 \times 3, \ldots \omega^3 \times \omega = \omega^3, \ldots \omega^4, \ldots \omega^\omega, \omega^\omega \mid 1, \ldots \omega^{\omega+1}, \ldots \omega_\omega \ldots$
etc.

Această mulţime bine ordonată are ca putere cardinală pe aceea a continuului, $2^{N_0} = N_1$ (dacă acceptăm ipoteza continuului) şi reprezintă în acelaşi timp un nou tip de ordine, primul număr ordinal de clasa a IlI-a, simbolizat prin Ω_1; continuăm adăugându-i mai întâi lui Ω_1 numerele ordinale din clasa întâi, apoi pe cele din clasa a Ii-a, ajungem astfel la o mulţime de putere cardinală N_2, care reprezintă un nou tip de ordine Ω_2, primul număr ordinal din clasa a IV-a ş.a.m.d.

Enumăr aici, fără să intru în amănunt, un şir de teoreme despre mulţimile transfinite care va arunca o altă lumină asupra acestui domeniu ciudat.

Să notăm mai întâi că continuul de putere N_2 (de exemplu cel al numerelor ordinale din clasa a IlI-a) nu mai este arhimedic.

Şirul de Aleph (puteri cardinale) obţinut prin clasele de numere ordinale, tipuri de ordine $\omega, \Omega_1, \Omega_2$ etc., pe care le simbolizăm prin N_0, N_1, N_2 etc. şi, se conformează fomulei iterative $2^{N_{n-1}} = N_n$ care au ca indici numere ordinale şi dau naştere unei mulţimi de putere N_ω mai mare decât cea a tuturor celor precedente. Unii s-ar mulţumi să se oprească aici; alţii vor merge cu entuziasmul până acolo încât vor încerca să genereze $N_{\Omega 1}$, $N_{\Omega 2}$ etc.

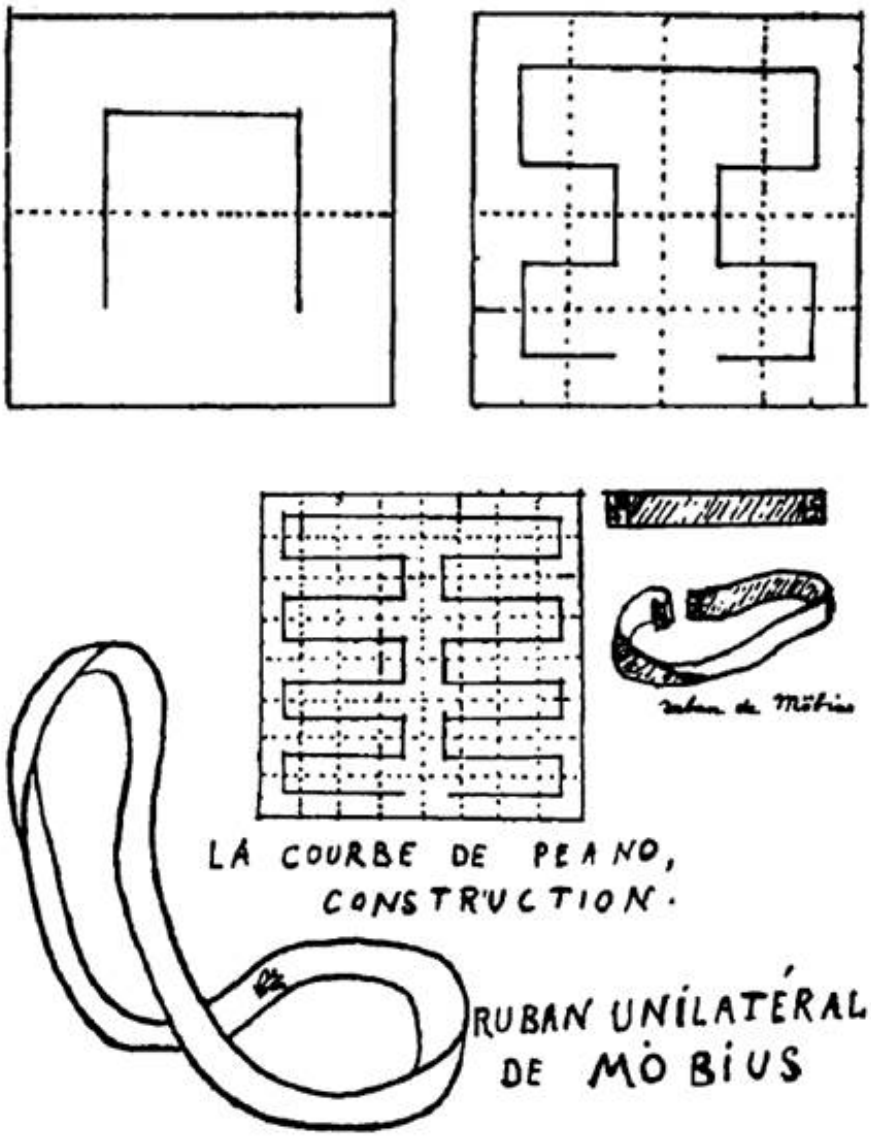
Să citäm teorema lui Zermelo: orice mulţime poate fi considerată ca o mulţime de elemente ale unei mulţimi bine ordonate.

Aranjamente cu repetiţii de m litere luate câte n (diferite grupe de n litere care se pot forma cu cele m litere date, litere ce se pot repeta) sunt în număr de m^n; de fapt aceasta aparţine teoriei combinărilor, şi vom vedea că aceste aranjamente corespund şi coeficienţilor „polinomului lui Leibniz“,

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m)^n.$$

Tot aşa cum 3^{N_0} reprezintă astfel mulţimea aranjamentelor cu repetiţii de 3 litere luate câte N_0 şi are puterea N_1 şi cum N_0^3 reprezintă mulţimea tuturor aranjamentelor de N_Q litere sau numere

luate câte trei şi nu mai are decât puterea N_0, tot aşa $N_0^{N_0}$ va simboliza mulţimea tuturor aranjamentelor tuturor numerelor naturale, sau raţionale luate câte N_0 şi va avea puterea N_1.



PLANŞA XI

În acest capitol, consacrat în parte transfinitului, îşi ocupă locul o entitate ciudată, demnă să figureze în galeria „monştrilor matematici”; este vorba de „curba care trece prin *toate* punctele unei suprafeţe plane date susceptibilă de a fi inclusă într-un pătrat”, sau Curba lui Peano.

Construcţia ei este simplă (ea este începută în planşa XI în trei etape succesive), dovada constă în construcţia însăşi şi în afirmaţia că, la limită, curba continuată la infinit va fi trecut prin toate centrele micilor pătrate succesive, aşadar prin toate punctele reale din pătratul iniţial. La limită, curba lui Peano va avea pur şi simplu aspectul unui pătrat negru.

Această forfoteală, aceste coborâşuri şi suişuri de şiruri infinite, ieşite din imaginaţia lui Cantor, care la naştere au părut tot atât de arbitrare şi inutile şi ca numerele imaginare la început, corespund totuşi unor fiinţe matematice virtual posibile (matematica este „ştiinţa posibilului”); fără ajutorul numerelor transfinite, astăzi nu am putea să tratăm nu numai problemele teoriei mulţimilor, dar nici pe acelea ale geometriei cu n dimensiuni şi ale hiperspaţiilor, ale Analysis Situs şi ale teoriei funcţiilor în general.

Planşa XI ne mai arată şi un alt „monstru” geometric, banda „unilaterală” a lui Mobius care se obţine secţionând un inel cilindric de hârtie şi lipind apoi cele două capete după ce unul a fost răsucit. O muscă sau linia continuă trasată de un creion, vor parcurge toată suprafaţa benzii întorcându-se în acelaşi punct după două înconjurări. Paradoxul este explicat prin faptul că deşi banda este unilaterală sau unilateră fiecărui punct îi corespund totuşi două suprafeţe, o faţă şi un dos.

Să mai citǎm şi „Curba lui Weierstrass” care, deşi este continuă, nu are nici o tangentă. Cât despre problema de a şti dacă mulţimile transfinite de putere numărabilă sau nenumărabilă pot fi nu numai posibile, ci şi actuale, dacă ne putem închipui, de pildă, un sistem de stele în Număr N_0 ca existând cu adevărat, această problemă şi numeroase altele înrudite ţin atât de metafizică cât şi de teoria cunoaşterii. Ba chiar i-am putea sfătui pe savanţii occidentali familiarizaţi cu transfinitul să facă exerciţii de meditaţie şi de contemplaţie asemănătoare cu cele făcute de înţelepţii şi savanţii hinduşi; mai apoi, unele discuţii la care să ia parte şi filosofi neotomişti, preoţi sau laici, cunoscători ai ştiinţei modeme, ar putea arunca o lumină nouă şi folositoare asupra acestor probleme care ţin, totodată, de matematică, de metafizică şi de teodicee sau cunoaşterea însuşirilor Fiinţei Supreme. Nu este o butadă; lăsând respectuos de-o parte orice problemă legată de revelaţie, existenţa lui Dumnezeu, a

unui Dumnezeu, a unui Dumnezeu Creator sau Demiurg este o ipoteză ştiinţifică admisă astăzi în mod deschis de fizică-matematică; ea îşi are locul său în grupul ipotezelor care nu duc la contradicţii. Iar studiul însuşirilor posibile ale Divinităţii, însuşiri posibile logic sau care fac parte din teologiile comparate ale diferitelor religii, însuşirile şi caracteristicile şirurilor transfinite, felul în care acestea se întrepătrund, în care pot uneori să se abată cu uşurinţă de la logica aristotelică, pot sugera proprietăţi asemănătoare, dar care nu se găsesc în constituţia personalităţilor finite, care ar permite înţelegerea şi rezolvarea anumitor probleme legate de calităţile transcendente şi „transfinite" ale raţiunii divine şi ale personalităţilor divine (ubicuitate, percepţii simultane în număr infinit etc.).

CAPITOLUL XI

GEOMETRII CU UN NUMĂR OARECARE DE DIMENSIUNI -TOT DESPRE POLITOPII CU PATRU DIMENSIUNI- ECHIPARTIŢIILE SPAŢIULUI ŞI ALE HIPERSPAŢIILOR - GEOMETRII NEEUCLIDIENE

Acum marele arhitect al universului ni se pare a fi un matematician desăvârşit.
(SIR JAMES JEANS)

Tot aşa cum am făcut şi în cazul numerelor transfinite, în mai multe din capitolele precedente l-am „imunizat" pe cititor împotriva surprizelor prea brutale care rezultă din introducerea în viaţa noastră normală a monştrilor geometrici din cea de-a patra dimensiune sau din altele şi mai îndepărtate.

De altfel, datorită lui Einstein, contemporanii noştri nu au nevoie de această imunizare, întrucât am fost cu toţii informaţi din când în când că probabil trăim într-o lume cu patru dimensiuni (trei spaţiale şi una temporală) sau măcar pe suprafaţa pseudosferică (un volum cu trei dimensiuni) a unui univers curb cu patru dimensiuni.

Această suprafaţă curbă pseudosferică este în realitate un volum, volumul finit $2\pi^2 R^3$, care se poate calcula dacă cunoaştem R, raza Universului.

Suprafeţele şi volumele curbe aparţin lumii neecludiene; acestea fie nu au nevoie de o lume înconjurătoare cu un număr mai mare de dimensiuni şi sunt neecludiene prin structură, fie pot fi curbate într-o lume care are o dimensiune în plus, ca aceea a cărei suprafaţă, hipersuprafaţa, ar fi universul curb cu trei dimensiuni pe care-1 percepem noi. Aşadar o lume curbă cu trei sau patru dimensiuni poate fi ori limitată la ea însăşi, socotită ca o încheiere (suprafaţa unei sfere de pildă), ori curbată într-o lume cu o dimensiune în plus. Aceasta face ca în aceste plimbări prin patru dimensiuni cu care spiritul nostru trebuie să se obişnuiască treptat, a cincea dimensiune dezvăluie câteodată un petic de firmament.

Am văzut deja că existenţa unui spaţiu cu un număr de dimensiuni mai mare decât cele trei ale spaţiului nostru obişnuit, cel al simţurilor noastre nemijlocite, fusese sugerată de corespondenţa riguros exactă dintre construcţiile algebrice cele mai îndrăzneţe şi o succesiune de imagini geometrice, corespondenţă deja evidentă în domeniul Numerelor Figurate. Matematicienii din secolul al XlX-lea şi-au închipuit mai întâi un spaţiu cu patru dimensiuni (cea de-a patra fiind perpendiculară pe celelalte trei) fapt care, deşi şochează la început

bunul simţ cotidian, este tot atât de posibil din punct de vedere logic precum ipoteza unei a treia dimensiuni perpendiculară pe cele două dimensiuni normale ale lumii sale plate pentru o fiinţă infinit de plată care trăieşte într-un spaţiu cu două dimensiuni (suprafaţa unui plan). Este singura explicaţie pe care ar putea-o da apariţiei bruşte în planul său a unui obiect nou (evident plat), mai cu seamă dacă acest obiect s-ar fi aflat mai întâi într-un alt compartiment al planului şi pentru moment ar fi dispărut. Acelaşi lucru se întâmplă în lumea noastră cu trei dimensiuni: nu am putea explica decât printr-o a patra dimensiune mutarea unui individ sau a unui obiect solid dintr-un volum închis (dintr-o cameră) într-un alt volum închis; la fel, deznodarea fără tăietură a unui nod, a unei frânghii care nu are capetele libere etc. însă savanţii, de vreo cincizeci de ani încoace, au putut „să vadă“ şi să construiască proiecţiile în spaţiul nostru ale acestor hipersolide regulate cu patru dimensiuni (la Palais de la Decouverte sunt expuse două modele, ale hipercorpurilor care prelungesc în spaţiul cu patru dimensiuni şirurile pentagon-dodecaedru-C_{120} şi pentagon-icosaedru-C_{600}) mai curând după un antrenament progresiv, prin analogii direct algebrice şi geometrice, după ce au calculat specificaţiile (numărul de vârfuri, laturi, de feţe, de celule sau volume de frontieră) hipercorpurilor sau politopilor regulaţi din spaţiul cu patru dimensiuni.

De atunci, relativitatea generală ne-a familiarizat cu ideea că universul nostru, în aparenţă tridimensional, ar fi în realitate un univers finit, curbat într-un spaţiu cu patru dimensiuni riemanian sau sferic. Să ne mărginim, pentru moment, la o lume euclidiană cu patru dimensiuni, homaloidală (fără curbură), şi să urmărim în ce fel octaedroidul sau hipercubul C_8 cu opt celule de frontieră (volume) cuburi, 24 de feţe pătrate, 32 de muchii şi 16 vârfuri decurge logic din pătrat (planşa XII).

Am dat deja (capitolul VI) tabelul care arată specificaţiile hipercubului pentru spaţiile cu un număr oarecare de dimensiuni (acest tabel şi tabelul corespunzător pentru hiperoctaedre sunt, după câte ştiu, inedite); el rezultă din principiul de formare al şirului dipol, pătrat, cub etc.: se operează translaţia corpului cu n-l dimensiuni în spaţiul cu n dimensiuni cu o lungime egală cu muchia (constantă), apoi se unesc două câte două punctele corespunzătoare ale celor două corpuri; pe planşa XII se vede principiul aplicat îndeosebi hipercubului, pentru trei proiecţii diferite. Cât despre hiperoctaedre (tabelul II, capitolul VI), principiul de formare este diferit: se adaugă de fiecare dată două vârfuri simetrice în raport cu centrul figurii corpului din spaţiul precedent şi se unesc cele două vârfuri noi cu celelalte puncte.

Specificaţiile pentru hiperoctaedrul cu n dimensiuni sunt:

1,

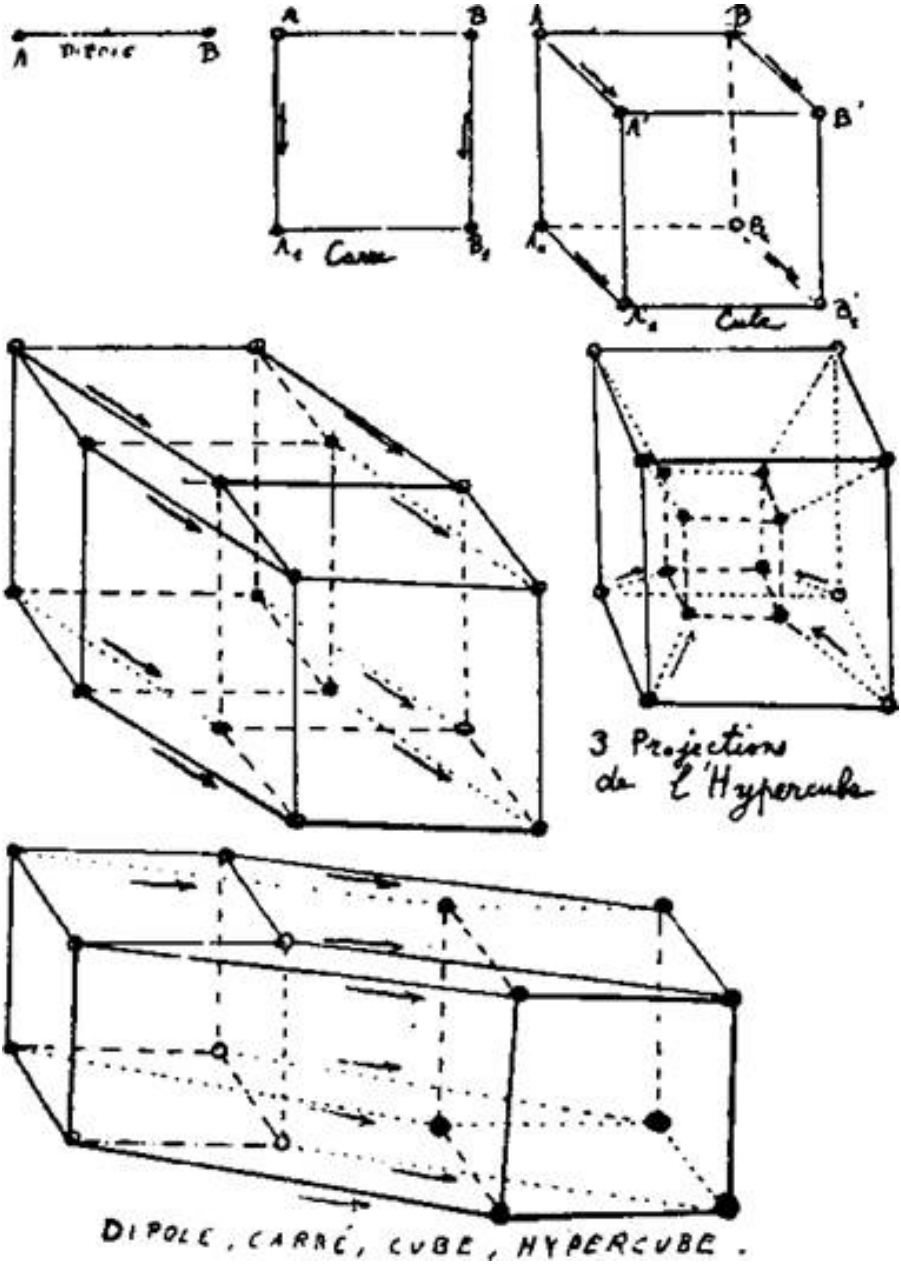
$$2^n, 2^{n-1}\frac{n}{1}, 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}, 2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \ldots,$$
$$\ldots 2^{n-k}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3.\ k}, \ldots 2^1\frac{n}{1}$$

Însuşi hiperoctaedrul cu n dimensiuni începe cu 1, continuă cu numărul de celule cu (n-l) dimensiuni şi se termină cu numărul vârfurilor, 2n.

Factorul esenţial al celui de-al K +1 -lea număr este al (n - K +1)-lea număr hiperpiramidal (din şirul triunghiular continuat în K dimensiuni); vedem că aceste numere hiperpiramidale care decurg din triunghiul lui Pascal intervin peste tot, în formarea tuturor hipercorpurilor; în plus, după cum am văzut până acum, acest triunghi dă specificaţiile tuturor hipercorpurilor din şirul triunghi, tetraedru etc.

Spaţiul cu patru dimensiuni arată 6 corpuri regulate (în loc de 5 în spaţiul cu 3 dimensiuni). Tabelul de la pagina următoare (repetat din capitolul III) dă descrierile specifice; vedem că în vreme ce 5 dintre ele decurg direct din cele 5 corpuri regulate cu 3 dimensiuni, C_{24}, deşi afiliat în oarecare măsură octaedrului, nu rezultă genetic din el.

După cum am notat deja în capitolul VI, din cercetările lui Francis Warrain (şi ale lui Donchian, care a realizat în Statele Unite modele din fire metalice ale proiecţiilor, în spaţiul nostru, ale hipercorpurilor din spaţiul cu 4 până la 24 dimensiuni) rezultă că, începând cu a cincea dimensiune, hipercorpurile derivate din dodecaedru şi icosaedru (adică din pentagon) dispar cu totul, nu rămân decât hipercorpurile derivate din tetraedru (şirul triunghiular), din cub şi din octaedru. Rezultă de aici că, la prima vedere, Secţiunea de Aur, predominantă în corpurile din şirurile pentagonale, dispare o dată cu pentagonul începând cu a cincea dimensiune. Ea apare totuşi indirect în anumite proiecţii ortogonale plane ale hipercorpurilor cu mai mult de 4 dimensiuni, după cum s-a arătat în planşa 8, fig. 2, din cap. VI, proiecţie plană a hipercubului cu 5 dimensiuni, a cărui diagramă arată trei decagoane legate prin Secţiunea de Aur. Figura 1, din aceeaşi planşă, arăta o proiecţie specială plană a lui C_{120}, - hiperdodecaedru - cu cele 120 de dodecaedre şi 720 de pentagoane ale sale, totul dominat de Secţiunea de Aur.



PLANŞA XII

Deşi cubul are, în principiu, ca proporţie dominantă $\sqrt{2}$ şi tetraedrul $\sqrt{3}$, octaedrul $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ (în timp ce dodecaedrul şi icosaedrul, având originea în pentagon, sunt determinate de

$\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, Secţiune de Aur), cele cinci corpuri regulate din spaţiul cu trei dimensiuni sunt atât de strâns înrudite morfologic (se poate trece de la unul la altul prin trasee elementare) încât, fără să apară explicit în structura primelor trei (tetraedru, cub şi octaedru), Secţiunea de Aur se află acolo în „putere“, de unde şi fraza deja citată a lui Campanus de Novara (sec. al XlII-lea), care spune că Secţiunea de Aur leagă logic cele cinci corpuri regulate printr-o simfonie iraţională. Este singura menţionare limpede a Secţiunii de Aur în epoca gotică, ea fiind mai apoi slăvită în cartea lui Pacioli, cu ilustraţii de Leonardo (1509), pomenită după aceea pentru ultima oară de Kepler la începutul secolului al XVII-lea ca fiind „una dintre cele două bijuterii ale geometriei. Pe urmă dispare până la mijlocul secolului al XIX-lea (Zeysing)“.

TABELUL III *al celor şase corpuri regulate în spaţiul cu 4 dimensiuni saupolitopi cu 4 dimensiuni, numite de obicei hiperpoliedre.*

Nume	Simbol	Număr de celule frontieră	Număr de feţe	Număr de laturi	Număr de vârfuri	Corpuri coresp. celor 3 dimensiuni
Pentaedroid sau Hipertetraedru sau Hiperpiramidă	C_5	5 tetraedre	10 triunghiuri	10	5	tetraedru
Octaedroid sau Hipercub	C_8	8 cuburi	24 pătrate	32	16	cub
Hexadeca-edroid	C_{16}	16 tetraedre	32 triunghiuri	24	8	octaedru
Icosatetra-edroid	C_{24}	24 octaedre	96 triunghiuri	96	24	nici unul
Hecatonico-saedroid	C_{120}	120 dodecaedre	720 pentagoane	1200	600	dodecaedru
Hexacosi-edroid	C_{600}	icosaedre 600	1200 triunghiuri	720	120	icosaedru

Să mai spunem că spaţiul cu 4 dimensiuni oferă şi corpuri semiregulate care corespund celor 13 poliedre arhimedice din spaţiul nostru şi care au ca celule sau ca volume frontieră poliedre de mai multe feluri, dar având toate muchiile egale. Specificaţiile lor au fost stabilite, de pildă cea a corpului care se obţine luând drept vârfuri mijloacele tuturor muchiilor hiperoctaedrului C_{16}; el are 96 de vârfuri , 432 de muchii, 480 de feţe triunghiulare şi 120 de icosaedre ca volume frontieră.

Există, de asemenea, în spaţiul cu 4 dimensiuni, 10 hiperpoliedre regulate în formă de stea care corespund atât celor două dodecaedre în formă de stea din cea de-a treia dimensiune, cât şi pentagramei.

Aspectul cel mai interesant, pentru această lucrare, al geometriei cu 4 dimensiuni este faptul că tocmai numerele figurate ne-au permis să stabilim specificaţiile politopilor regulaţi în oricare spaţiu.

Se ştie că în spaţiul cu două dimensiuni (planul) echipartiţia perfectă prin poligoane regulate se obţine cu ajutorul pătratului, al triunghiului şi al hexagonului regulat (identic, de altfel, cu 6 triunghiuri echilaterale); avem în plus 14 partiţii semiregulate, folosind două sau trei tipuri de poligoane regulate, ceea ce înseamnă în total 17 echipartiţii.

În spaţiul cu 3 dimensiuni cele 5 corpuri regulate nu oferă decât o echipartiţie regulată a spaţiului prin mijlocirea cubului.

Folosindu-ne de poliedrele semiregulate, arhimedice, obţinem o echipartiţie semiregulată cu poliedrul lui Kelvin (care are 8 feţe hexagonale şi 6 feţe pătrate) şi alta cu prisma dreaptă hexagonală regulată (cu muchiile egale).

Am citat deja numerele cuboctaedrice centrate

1, 13, 55, 147, 309, 561, 923 ...,

$$1 + \frac{n-1}{3}(10_n^2 - 5_n + 6)$$

, care ne dau numerele succesive ale sferelor în asamblări de sfere egale tangente (gnomoanele 1, 12, 42, 92, ... etc. oferă numerele sferelor în straturi succesive).

Spre deosebire de spaţiul cu două dimensiuni, în care o asamblare de triunghiuri echilaterale produce o echipartiţie perfectă în trei dimensiuni, o asamblare regulată de tetraedre nu dă o echipartiţie compactă a spaţiului.

Am studiat şi echipartiţiile regulate în spaţiul cu 4 dimensiuni; ele pot fi obţinute cu politopii următori:

Hipercubul (sau octaedroidul) sau C_8 (în fiecare vârf se întâlnesc 16 politopi), hiperoctaedrul, C_{16} (24 politopi în fiecare vârf) şi C_{24} (opt politopi în fiecare vârf). Există şi o echipartiţie care corespunde celei din spaţiul cu 3 dimensiuni prin îmbinarea poliedrelor lui Kelvin; este o îmbinare de politopi semiregulaţi care au 30 de celule frontiere,

dintre care 10 sunt poliedre ale lui Kelvin şi 20 prisme drepte hexagonale regulate.

Dintre hipercorpuri să nu uităm şirul hipersferelor ieşite din înrudirea punct, circumferinţă, sferă etc. Tot aşa cum sfera obişnuită are suprafaţa $4\pi R^2$, hipersfera cu 4 dimensiuni are volumul frontieră sferic $2\pi^2R^3$, ceea ce va permite să se calculeze volumul universului nostru curb îndată ce-i vom cunoaşte raza ceva mai exact (după de Sitter, 1750 milioane de ani lumină; după observatorul de la Palomar, 5 mii de milioane de ani lumină).

Hipervolumul sau joja unei hipersfere cu n dimensiuni creşte la început, ajunge la un punct maxim după cea de-a VII-a dimensiune, apoi descreşte.

Raza hipersferei (sau hipersferoidului) circumscrisă hiper-piramidei cu n dimensniuni este (L muchia hiperpiramidei).

$$R_n = \frac{L}{n+1}\sqrt{n^0 triunghi\ triunghiular} = \frac{L}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Când n creşte nedefinit, Rn tinde către $\frac{L}{\sqrt{2}}$.

Individul cu 2 dimensiuni, care trăieşte pe suprafaţa unei sfere, şi individul cu 3 dimensiuni, care trăieşte în volumul frontieră al unei hipersfere cu 4 dimensiuni, au impresia că trăiesc într-un spaţiu neeuclidian riemanian. Este cazul nostru potrivit lui Einstein! Există într-adevăr trei tipuri generale de geometrii imaginabile pentru savanţii dintr-un univers locuit, tipuri derivate din trei ipoteze diferite legate de postulatul lui Euclid despre paralele.

Dacă admitem postulatul (printr-un punct putem duce la o dreaptă o paralelă şi numai una) ne găsim în geometria euclidiană, homaloidală, fără curbură, în care suma celor trei unghiuri ale unui triunghi este egală cu suma a două unghiuri drepte, 180°, oricare ar fi numărul de dimensiuni ale spaţiului.

Această geometrie, care este aceea, aproximativă, a lumii noastre galactice, păstrează în orice translaţie mărimile şi similitudinile figurilor sau volumelor după deplasare. Mai putem numi această geometrie *parabolică*.

Al doilea tip este cel al geometriei neecludiene *hiperbolice*; printr-o dreaptă se pot duce mai multe paralele la o altă dreaptă, suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decât 180°, spaţiul are o curbură total negativă.

Geometria hiperbolică s-ar impune unor indivizi care locuiesc pe o pseudosferă, formată într-o suprafaţă biconcavă cu terminaţii simetrice asimptotice prin rotirea în jurul asimptotei lor comune a două tactici care se unesc într-un punct de întoarcere comun.

Al treilea tip posibil de geometrie este geometria neeculidiană a lui Riemann, zisă eliptică, cu curbură pozitivă. Printr-un punct nu se poate duce nici o paralelă la o altă dreaptă, iar suma unghiurilor unui triunghi este mai mare de 180°. Am arătat deja că aceasta ar fi geometria unor fiinţe care trăiesc în volumul frontieră al unei hipersfere cu 4 dimensiuni, a noastră deocamdată.

Nu ştim, aşadar, dacă spaţiul nostru este eliptic sau sferic, curbat într-un spaţiu superior euclidian, dar, după cum a arătat Poincare, nici una dintre aceste trei geometrii nu este în realitate mai adevărată decât cealaltă. Iar locuitorii (dacă există) planetelor care aparţin altor galaxii se folosesc poate de convenţii şi de postulate care se deosebesc mult de ale noastre, dar care sunt potrivite pentru nişte condiţii fizice şi spirituale de existenţă despre care nu ştim nimic.

Punctele noastre de vedere despre aceste domenii încă paradoxale pentru noi, geometrii neecludiene, spaţii cu un număr oarecare de dimensiuni, numere imaginare, nu sunt elucubraţiile puerile ale unei minţi omeneşti *bombinans in vacuo*, ci uneltele fecunde ale mai multor capitole din fizica matematică.

CAPITOLUL XII

PERMUTĂRI ŞI COMBINĂRI-TOT DESPRE TRIUNGHIUL LUI PASCAL-POLINOMNUL LUI LEIBNIZ - PIRAMIDA ŞI HIPERPIRAMIDA LUI PASCAL - PĂTRATE MAGICE

Unul dintre ţelurile urmărite în ultima vreme de matematicieni a fost să definească toate sistemele de numere create de-a lungul veacurilor, numere fracţionare, iraţionale, algebrice, transfinite, reale, în perechi (cum sunt fracţiile) sau în şiruri de numere întregi. Toate numerele reale putând fi reprezentate prin numerele cuprinse între 0 şi 1 (teoria transfinitului şi-a arătat aici utilitatea), aceste numere între 0 şi 1 pot fi ele însele reprezentate prin şiruri finite sau infinite de numere întregi, acestea din urmă putând fi ritmate în perioade simple sau mixte, sau care, dimpotrivă, nu se supun nici unei legi de succesiune (ca numerele transcendente şi numerele algebrice incomensurabile, π şi *e*, ca şi $\sqrt{2}$).

Am menţionat sistemul ingenios de definire a numerelor reale al lui Dedekind; aici numerele sunt atât tăieturi între şiruri convergente care se întâlnesc la limită pe tăietură, cât şi şirurile însele. Şi aici teoria transfinitului înlesneşte nu numai raţionamentului şi înţelegerea ipotezei.

Limitându-mă atât cât am putut la numere, am trecut sub tăcere sau am menţionat în treacăt o sumedenie de domenii ale matematicii cum ar fi cel al calculului modular, teoria numerelor prime, soluţia ecuaţiilor algebrice de un grad oarecare, calculul modelelor, în sfârşit întreaga teorie a funcţiilor şi disciplinelor conexe, calculul infinitezimal, diferenţial şi integral, capitolele corespunzătoare din geometria analitică, cea codificată de Descartes, în care orice figură geometrică poate fi descrisă şi condensată într-un simbol algebric mai mult sau mai puţin scurt, şi invers, în care oricărei formule, oricărui simbol algebric îi poate corespunde o figură sau o curbă. Tot pitagoreicii au fost cei dintâi care, având concepţia Numerelor Figurate, au văzut această corespondenţă între număr şi formă. Am trecut repede peste aceste materii sau le-am lăsat cu totul deoparte (calculul probabilităţilor, de pildă), deoarece, o spun încă o dată, această lucrare nu este un tratat de istorie a matematicii în general, ci doreşte să se limiteze pe cât posibil la istoria Numărului şi, atunci când se iveşte oricât de puţin, la metafizica Numărului. Vom întâlni ceva mai departe logistica, logica şi algebra sau logica simbolică interpenetrându-se deseori, în măsura în care aceste discipline au

legătură cu Numărul, dar înainte de aceasta voi prezenta aici un alt capitol din teoria numerelor întregi, în care vom regăsi numerele figurate şi spaţiile cu 4 sau n dimensiuni. Este domeniul, destul de întins şi el, al combinărilor, despre care am spus câte ceva în legătură cu filosofia chineză clasică, în care teoria cunoaşterii se foloseşte mai cu seamă de o mulţime nesfârşită de combinări.

În sensul cel mai general, combinările cuprind două idei conexe, aceea de permutare şi aceea de combinare propriu-zisă, care pot la rândul lor să se combine în „anjamente".

Cel mai simplu concept în acest domeniu este cel al tuturor permutărilor (substituirilor) de n obiecte posibile, adică toate felurile de a dispune aceste n obiecte unul lângă celălalt, importanţă având ordinea.

De exemplu, cu 3 obiecte a, b, c, cele şase permutări sunt abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Formula generală este

P_n = n! (n factorial, n! = n(n-l)(n-2)...3 x2 x 1).

De exemplu, numărul de feluri în care 8 persoane pot fi aşezate la masă este P_8 = 8x7x6x5x4x3x2xl = 40.320.

Pentru 10 persoane P_{10} = 3.628.800.

Dacă nu luăm decât un anumit număr p de obiecte dintre care n obiecte date (aranjamente cu repetitie de n obiecte luate câte p):

$$A_n^p = n^p$$

Ceea ce este adevărat chiar dacă p este mai mare decât n.

Regăsim de pildă cele 8 aranjamente (le putem numi permutări, dar este mai bine să păstrăm acest termen pentru permutările propriu-zise P_n = n!) de 2 obiecte luate câte 3, cele 8 Trigrame magice chinezeşti:

$$A_2^3 = 2^3 = 8$$

cât şi a doua etapă a înmulţirii lor, cele 64 de aranjamente de 8 trigrame luate câte două.

$$A_8^2 = 8^2 = 64$$

Numărul de combinări fără repetiţie de n obiecte luate câte p (n fiind întotdeauna mai mare decât p, întrucât repetarea unui obiect nu poate avea loc într-un grup dat) este

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Acestea sunt combinări propriu-zise. De exemplu, pentru a scoate cei patru aşi din 52 de cărţi de joc trăgând patru cărţi ai o şansă din

$$C_{52}^{4} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 270275$$

Dacă permutăm fiecare din aceste combinări (în acest caz contează ordinea)

$$P_n^p = p!\, C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

Tastați ecuația aici. (aplicăm formula permutărilor $P_p = p!$ sumei combinărilor, C_n^p).

O broască cu cifru format din combinări de trei litere din 26 dă P_{26}^3 = 26 x 25 x 24 = 15.600 combinări.

Pentru a explica formula

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n+p-1)}{p!}$$

trebuie să reintroducem triunghiul lui Pascal, care s-a arătat deja indispensabil politopilor cu patru dimensiuni.

Fiecare rând al acestui triunghi reprezintă nu numai anumite cazuri particulare ale formulei generale C_n^p, combinări de p obiecte alese din n obiecte diferite, ci şi coeficienţii dezvoltărilor binoamelor $(x + a)^1$, $(x + a)^2$, $(x + a)^3$,... $(x + a)^n$, coeficientul C_n^p la intersecţia celei de-a p + 1 coloane şi al celui de-al n + 1 rând fiind egal cu

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n+p-1)}{p!}$$

De exemplu, termenii celui de-al şaselea rând corespund cu dezvoltarea binomului $(x + a)^5$:

$x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$

triunghiul lui Pascal dând în fiecare caz valoarea coeficientului C_n^p

Al şaptelea rând reprezintă dezvoltarea binomului $(x+a)^6$, în care coeficienţii numerici ai lui x vor fi

$C_6^0\ C_6^1 C_6^2\ C_6^3\ C_6^4\ C_6^5\ C_6^6$ cu convenţiile $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_{n!}^{n!} = 0!$

Suma acestor termeni este egală cu:

1+6 + 15 + 20 + 15 + 6+1= 2^6 = 64

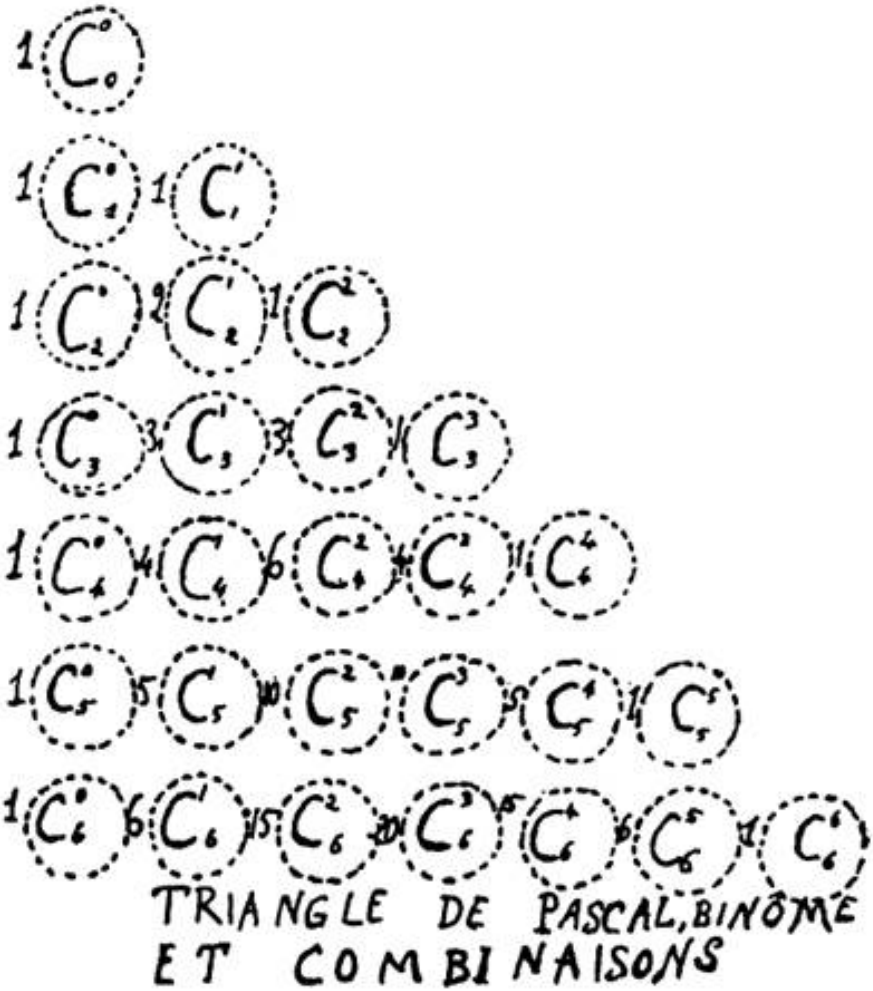
Într-un mod mai general, suma termenilor celui de-al n + 1-lea rând reprezintă 2^n, iar fiecare termen coeficientul numeric corespunzător al lui x în binomul lui Newton, $(x + a)^n$. Avem:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\times 2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)a^3x^{n-3}}{1\times 2\times 3} - \dots \frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-3}x^2 + \frac{n}{1}a^{n-1}x + a^2$$

Suma coeficienţilor numerici va fi:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_{n+\dots+} C_n^n = 2^n$$

Ştim deja că fiecare rând al triunghiului reprezintă (înlăturând diagonala cu cifra 1) specificaţiile corpurilor din şirul „bipol“, triunghi, tetraedru, hiperpiramidă etc. De exemplu, al patrulea rând 1, 4, 6, 4 dă chiar tetraedrul (1), cele patru feţe, şase laturi, patru vârfuri ale tetraedrului (reprezentând şirul în cea de-a treia dimensiune), al cincilea rând 1, 5, 10, 10, 15, dă, pe lângă hipercorpul însuşi (1), cele cinci tetraedre, zece triunghiuri, 10 laturi, 5 vârfuri ale hiperpiramidei (sau hipertetraedrul sau pentaredroidul), iar al n-lea rând dă specificaţiile hipercorpului cu n-l dimensiuni aparţinând şirului. Coloanele verticale reprezintă (începând cu a treia) numerele triunghiulare, piramidale, hiperpiramidale etc. a *n*-a coloană reprezentând numerele figurate cu n-l dimensiuni; este mai bine ca aici să nu înlăturăm coloana diagonală a cifrelor 1 pentru a putea păstra capetele de şiruri (în mod deosebit cifrele unu).



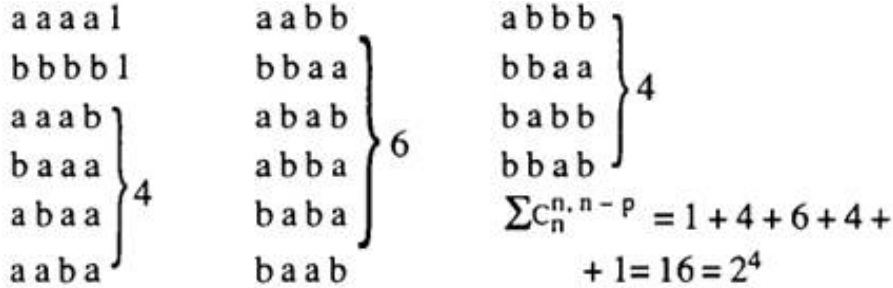
PLANSA XIII

Revenind Ia combinări avem

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!} = C_n^{n-p} = C_n^{n-p,p}$$

Coeficientul C_n^p reprezintă, aşadar, nu numai numărul de combinări posibile de n obiecte luate câte p, ci şi pe cel al combinărilor de n obiecte luate câte (n-p), cât şi permutările combinărilor de n obiecte de două feluri diferite, p variind de la 0 la n.

Exemplul de $\sum C_n^{n,n-p}$ pentru n = 4, patru obiecte de două feluri diferite (coeficienţi a lui (x + a)^4 sau al cincilea rând din triunghiul lui Pascal, p variind de la 0 la 4).



2^4 reprezintă numărul de aranjamente posibile a două litere luate câte patru.

Numărul de combinări de 5 obiecte luate câte trei este al patrulea termen C_5^3 din al şaselea rând din triunghiul lui Pascal, 10. (Avem direct prin

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}; \quad C_5^3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$$

Pentru cinci obiecte (a, b, c, d, e) combinările sunt abc, abd, abe, aed, ace, ade, bed, bce, bde, cde.

Aici nu sunt repetiţii, iar ordinea literelor nu are importanţă.

C_n^{n-p} este aici $C_5^{5-3} = C_5^2 = \frac{5\times4}{2} = 10$
2

Combinările sunt cele de 5 obiecte luate câte două: ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, adică tot 10.

$C_n^{n-p,p}$ devine aici $C_5^{2,3}$ numărul de combinări care se poate face cu 5 obiecte de două feluri diferite, luând n - p = 2 obiecte de un fel şi p = 3 obiecte de celălalt fel.

aaabb aabab aabba abaab ababa
bbbaa bbaba bbaab babba babab

tot 10; aici are importanţă ordinea, iar inversările se elimină.

Dacă permutăm cele 10 combinări, C_5^3 (introducând ordinea)

obţinem aranjamentele P_5^3 = 5x4x3 = 60.

Există o formulă mai generală decât aceea a binomului lui Newton pe care o putem numi multinomul sau polinomul lui Leibniz,

$$(a+b+c+\cdots+1)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots\,\lambda!} \times a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots 1^\lambda$$

unde $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\lambda$ fiind numere întregi astfel încât $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = m$ cu alte cuvinte $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\lambda$ reprezentând toate partiţiile întregi ale numărului m.

Tot aşa cum binomul $(a + b)^m$ şi triunghiul lui Pascal ne dau toate formulele relative la combinările de două feluri de obiecte, la fel şi trinomul $(a + b + c)^m$ şi o piramidă a lui Pascal, despre care vom vorbi în curând, ne dau formulele combinatorii pentru obiecte de trei feluri diferite, iar cvadrinomul $(a + b + c + d)^m$ şi o hiperpiramidă a lui Pascal, pe care triunghiul lui Pascal ne îngăduie să o construim fără greutate, ne dau informaţii despre combinările de obiecte de patru feluri diferite.

Pentru formula cea mai generală privitoare la combinări de obiecte de n feluri diferite, cea a polinomului lui Leibniz, coeficienţii combinatorii nu se prezintă în mod direct, ci, după cum am văzut, prin intermediul partiţiilor întregi. Teoria partiţiilor este un alt domeniu al teoriei numerelor întregi care ar alcătui un singur volum şi este strâns înrudit cu teoria combinărilor multiple. Coeficienţii termenului $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots 1^\lambda$ din polinomul lui Leibniz reprezintă:

1° numărul de permutări al combinării $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots 1^\lambda$ de obiecte în număr ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$),cu $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda = n$;

2° numărul de feluri în care literele combinării $a^\alpha b^\beta \ldots c^\gamma$ pot fi aşezate în m cutii diferite, câte o literă în fiecare cutie. Sumele $\sum$ din formula generală corespund fiecărei partiţii a numărului m.

Întorcându-ne la 1°, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ reprezintă una din partiţiile lui m în care unele dintre numerele $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ etc.

pot fi nule, iar însumarea $\sum$ reprezintă numărul (suma numerelor) tuturor permutărilor posibile pentru *toate* partiţiile lui m.

Exemplu. — $(a + b + c + b)^5$

$4^5 = 1024 = 4 \times 60 + 12 \times 20 + 12 \times 30 + 12 \times 5 + 12 \times 5 + 12 \times x\ 10 + 4$

(partiţii)

$1112 \ldots 60\ a^2 b c d$	4 ori ... $\frac{5!}{2!}$	$= 60$
$113 \ldots 20\ a b c^3$	12 ori ... $\frac{5!}{3!}$	$= 20$
$122 \ldots 30\ a^2 b^2 c$	12 ori ... $\frac{5!}{2!\,2!}$	$= 30$
$14 \ldots 5\ a^4 b$	12 ori ... $\frac{5!}{4!}$	$= 5$
$23 \ldots 10\ a^3 b^2$	12 ori ... $\frac{5!}{3!\,2!}$	$= 10$
$5 \ldots a^5$	4 ori ... $\frac{5!}{5!}$	$= 1$

60 reprezintă, de exemplu, atât numărul de permutări ale combinării a^2 b c d sau a a b c d cu patru obiecte a, b, c, d, cât şi numărul de compuneri ale partiţiei 1112 al lui 5.

Alte exemple:

3321 sau 3^2 21 este o descompunere a numărului 9, care dă 12 compuneri (corespunzând permutărilor combinării a, a, P, y)

Cele 12 componente sunt:

3321 3312 3231 3213 3132 3123
2331 2313 2133 1332 1323 1233

sau:

la descompunerea 321 al lui 6 sunt asociate compunerile:

321 312 231 213 132 123

Dar toate partiţiile lui 6 (corespunzând combinărilor de tipul $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots 1^\lambda$ astfel încât $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda$) sunt la rândul lor 6, 51, 42, 33, 411, 321, 222, 3111, 2211, 21111, 111111.

Intervenţia partiţiilor în formula multinomului provine, aşadar, din faptul că numărul de partiţii al lui m este în acelaşi timp numărul

de combinări ale numerelor $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, astfel încât $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda$ = m şi numărul de compuneri pentru fiecare partiţie este egal cu numărul permutărilor pentru fiecare combinare corespunzătoare (transformarea simbolică constă pur şi simplu în înlocuirea cifrelor partiţiior prin literele combinărilor, precum 3321 prin $\alpha, \alpha, \beta, \gamma$).

Însumarea totală în formulă cuprinde, aşadar, enumerarea permutărilor tuturor combinărilor de litere care se pot forma transcriind în litere partiţiile lui m.

m^n este egal cu suma produselor dintre numărul de combinări aparţinând fiecărui $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots 1^\lambda$ şi numărul permutărilor posibile corespunzătoare (m este puterea polinomului, n numărul termenilor).

Cu patru obiecte a, b, c, d şi $(a + b + c + d)^5$, cele 12 tipuri de combinări pentru $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 3$

sau $\begin{cases} a\,b\,c^3 \\ a\,b\,c\,c\,c \end{cases}$

vor fi:

$a^3\,b\,c$	$b^3\,a\,c$	$c^3\,a\,b$	$d^3\,a\,b$
$a^3\,d\,c$	$b^3\,a\,d$	$c^3\,b\,d$	$d^3\,a\,c$
$a^3\,b\,d$	$b^3\,d\,c$	$c^3\,a\,d$	$d^3\,b\,c$

iar cele 20 de permutări vor fi:

abccc	baccc	cccab	ccbac	cabcc	cbcca
acbcc	bcacc	cccba	ccbca	cbacc	
accbc	bccac		ccabc	cbcac	
acccb	bccca		ccacb	cacbc	
				caccb	

Fiecare permutare poate fi aplicată fiecăreia dintre cele 12 combinări şi vom avea 240 de produse.

Pentru $(a + b + c + d + e)^5$

permutările, adică coeficienţii termenilor formei

$a\,b\,c\,d\,e$ vor fi $120 = 5!$

$a^2\,b\,c\,d$ $60 = \dfrac{5!}{2!}$

$a\,b\,c^3$ $\quad 20 = \frac{5!}{3!}$

$a^2\,b^2\,c$ $\quad 30 = \frac{5!}{2!\,2!}$

$a^4\,b$ $\quad 5 = \frac{5!}{4!}$

$a^3\,b^2$ $\quad 10 = \frac{5!}{3!2!}$

a^5 $\quad 1 = \frac{5!}{5!}$

$\sum = 120 + 1200 + 600 + 900 + 100 + 200 + 5 = 3125 = 5^5$ (m^n dar aici numărul termenilor polinomului şi puterea sunt egali, aşadar m = n).

Am menţionat deja o piramidă şi o hiperpiramidă a lui Pascal care introduc spaţiile cu 3, 4 şi n dimensiuni în teoria combinărilor de 3, 4, sau n obiecte de diferite feluri.

Triunghiul lui Pascal ne permite într-adevăr să stabilim o „Piramidă a lui Pascal“ ale cărei secţiuni, paralele cu baza, ne îngăduie la rândul lor să calculăm toate combinările de obiecte de trei feluri diferite, întrucât aceste secţiuni dau coeficienţii trinomului $(a + b + c)^m$ pentru oricare valoare a lui m.

De exemplu, cea de a şasea secţiune triunghiulară a piramidei lui Pascal

					1							
				5		5						
			10		20		10					
		10		30		30		10				
	5		20		30		20		5			
1		5		10		10		5		1		

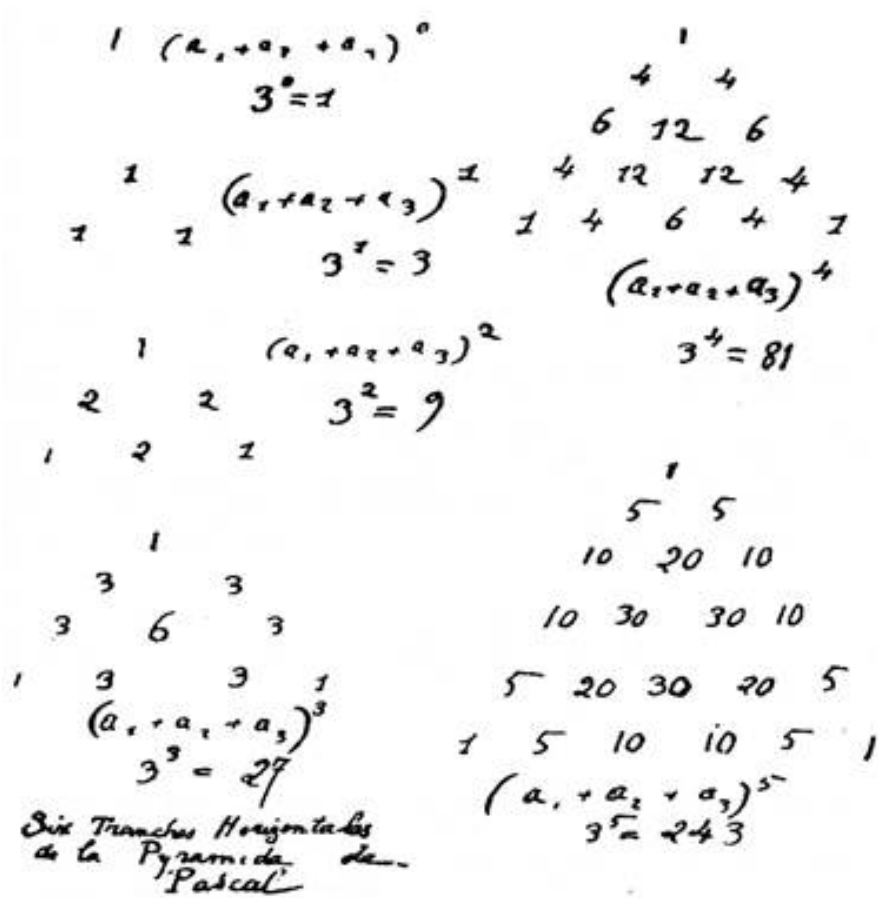
dă coeficienţii trinomului $(a + b + c)^5$,care reprezintă numerele tuturor combinărilor ce se pot face între 5 obiecte de diferite feluri. Suma acestor numere este $3^5 = 243$.

Formula generală a acestor combinări devine:

$C_n^{n-r-s,r,s}$; cu

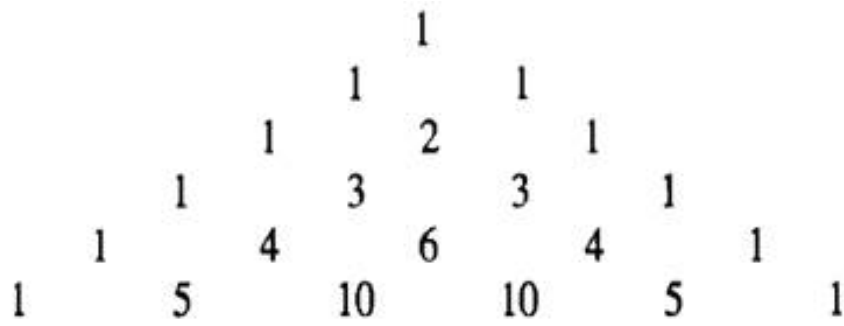
$r+s \leq n ; r \leq n ; s \leq n$

Vedem că această secţiune din Piramida lui Pascal nu este un triunghi al lui Pascal propriu-zis; fiecare dintre laturile sale exterioare reprezintă $C_5^0\ C_5^1\ C_5^2\ C_5^3\ C_5^4\ C_5^5$, al şaselea rând al triunghiului lui Pascal a cărui sumă este 2^5.



PLANŞA XIV

Suprafeţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri ale lui Pascal dispuse astfel



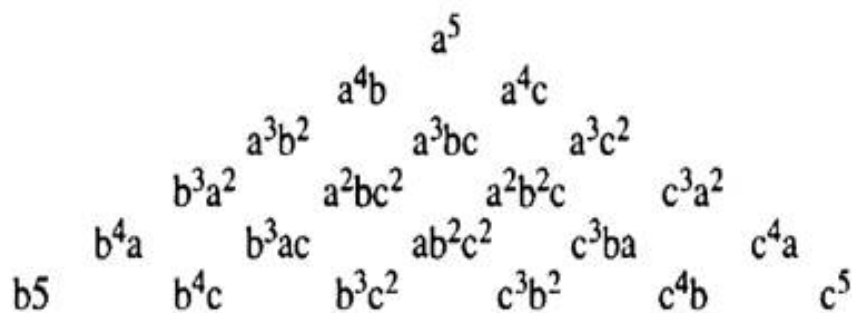
Cele şase secţiuni orizontale ale piramidei lui Pascal sunt reprezentate în tabelul IV planşa XIV.

În fiecare secţiune triunghiulară numerele prezintă o suprafaţă „baricentrică" cu numere dispuse în jurul unor „centre de greutate".

Revenind la combinări, putem reprezenta această a şasea secţiune a piramidei lui Pascal şi ca în tabelul V, planşa XV.

Coeficienţii reprezintă numerele de combinări de 5 obiecte de trei feluri diferite în număr de $3^5 = 243$.

Triunghiul se mai poate alcătui şi prin tipurile termenilor trinomului $(a + b + c)^5$; cifra corespunzătoare din secţiunea precedentă îi indică coeficientul (de tipul $C_5^p \times C_r^q$ cu *p, q, r,* variind de la 0 la 5).



Vedem că doar triunghiul lui Pascal permite plasarea tuturor numerelor piramidei lui Pascal şi calcularea tuturor combinaţiilor posibile între 3 obiecte de diferite feluri (planşele XVI, XVII).

Acelaşi procedeu ne permite să alcătuim o hiperpiramidă a lui Pascal reprezentată prin *secţiuni solide,* care vor fi piramide, adică tetraedre regulate reprezentând pe rând combinări de 4 obiecte de diferite feluri luate câte 0, câte 1, câte 2, câte 3, câte 4, câte 5 etc.

Iată diferitele piramide, care sunt secţiunile solide ale unei hiperpiramide (hipertetraedru sau pentaedroid cu 5 vârfuri care reprezintă linia triunghi-tetraedru în cea de-a patra dimensiune)

reprezentate prin numerele ce figurează pe muchiile lor. Interesul acestei diagrame constă în faptul că ea reprezintă, în paralel cu dezvoltările succesive ale cvadrinomului $(a + b + c + d)^n$, numerele tuturor combinărilor de 4 obiecte de feluri diferite luate câte 1, câte 2, câte 3, câte 4,... câte n. Aici ne vom opri la $n = 5$.

$$C_5^5 \times C_5^5$$

$$C_5^4 \times C_4^4 \qquad C_5^5 \times C_5^1$$

$$C_5^1 \times C_3^3 \quad C_5^4 \times C_4^3 \quad C_5^5 \times C_5^3$$

$$C_5^2 \times C_2^2 \quad C_5^3 \times C_3^2 \quad C_5^4 \times C_4^2 \quad C_5^5 \times C_5^2$$

$$C_5^1 \times C_1^1 \quad C_5^2 \times C_2^1 \quad C_5^3 \times C_3^1 \quad C_5^4 \times C_4^1 \quad C_5^5 \times C_5^1$$

$$C_5^0 \times C_0^0 \quad C_5^1 \times C_1^0 \quad C_5^2 \times C_2^0 \quad C_5^3 \times C_3^0 \quad C_5^4 \times C_4^0 \quad C_5^5 \times C_5^0$$

PLANȘA XV

Structura „baricentrică“ (dacă numerele ar reprezenta greutăţi) apare în aceste piramide (secţiuni solide ale hiperpiramidei lui Pascal) aşa cum apăreau în secţiunile triunghiulare plane ale piramidei lui Pascal.

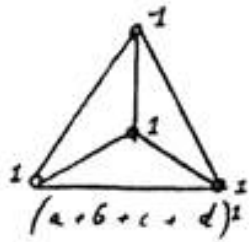
Teoretic, hiperpiramidele în spaţiul cu 5, 6 sau n dimensiuni ne permit, de asemenea, să stabilim numerele combinărilor de obiecte de 5, 6 sau n feluri diferite luate câte 1, câte 2,... câte m, ca şi coeficienţii dezvoltărilor polinoamelor $(a + b + c + ... + p)^m$ oricare ar fi m şi n.

PĂTRATE MAGICE

Înainte să trecem de numerele întregi finite trebuie să semnalez un capitol în care este vorba de ceea ce se poate numi „matematica distractivă”, cel al *pătratelor magice*. Am să definesc pe scurt principiul pătratelor magice şi voi da câteva exemple.

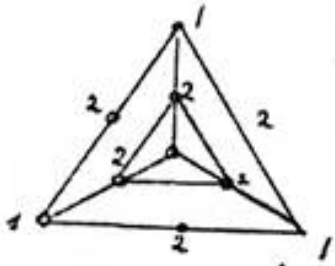
Un pătrat magic normal este alcătuit din n^2 căsuţe egale (n pentru fiecare latură), în care primele n^2 numere întregi sunt aranjate (unul în fiecare căsuţă) astfel încât sumele numerelor din fiecare coloană, din fiecare rând şi din cele două diagonale să dea aceleaşi constante.

$(a+b+c+d)^0$ $4^0 = 1$



$(a+b+c+d)^1$

$4^1 = 4$



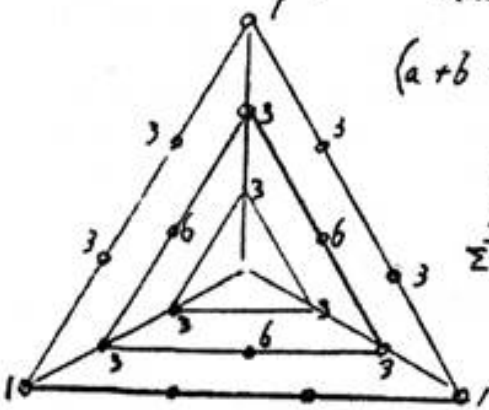
$(a+b+c+d)^2$

$6 \times 2 = 12$

$4 \times 1 = 4$

$\Sigma = 16 = 4^2$

$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$



$(a+b+c+d)^3$

4×1 1

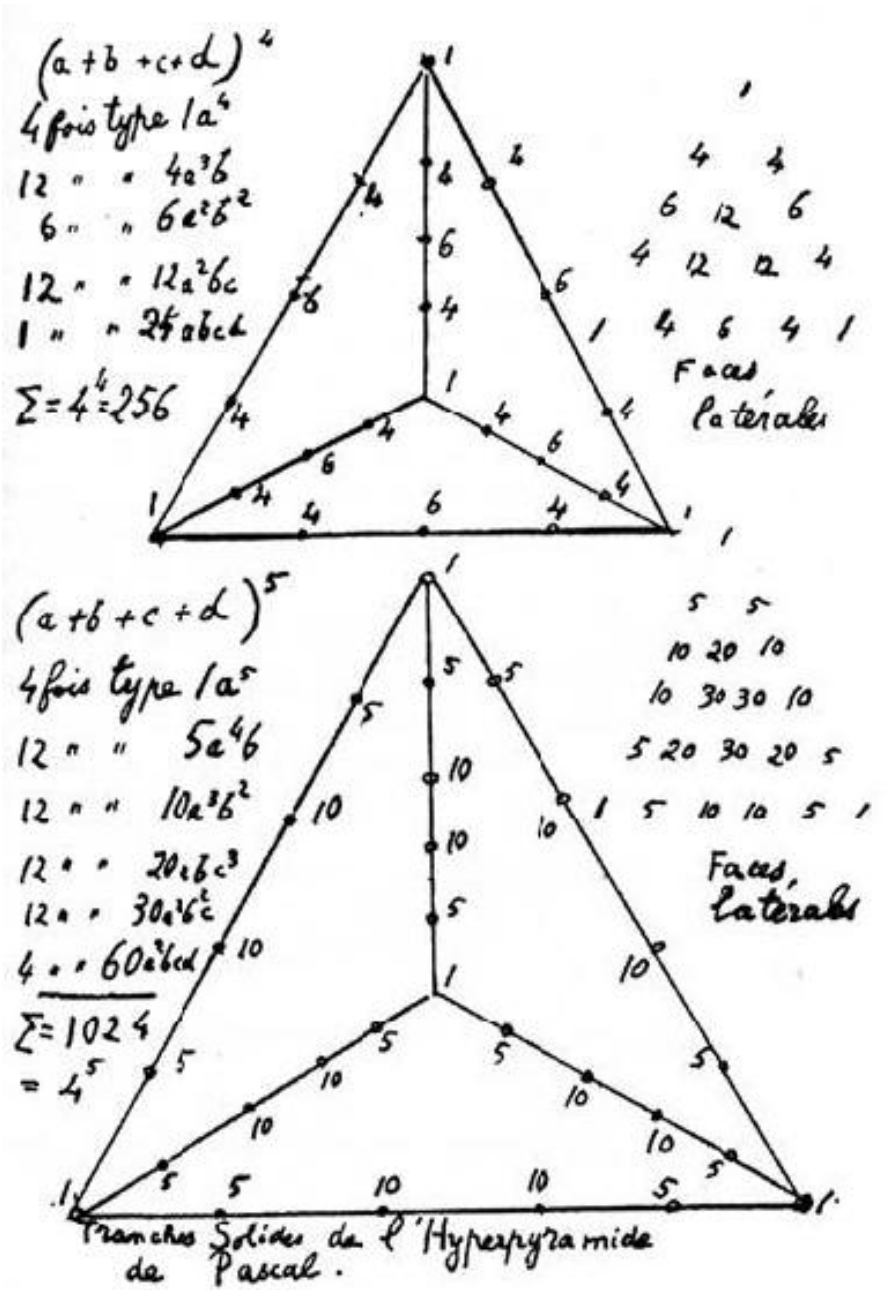
12×3 3 3

$\frac{4 \times 6}{\Sigma = 64 = 4^3}$ 3 6 3

1 3 3 1

Faces latérales

Tranches Solides de l'Hyperpyramide de Pascal



PLANȘA XVII

Pentru un pătrat dat această constantă se numeşte „constantă

$$\frac{1n}{2}\,(n^2+1)$$

magică" şi are ca valoare

Numărul n de rânduri sau de coloane dintr-un pătrat magic se numeşte *ordinul* pătratului; în planşa XVIII sunt arătate pătrate magice de ordinul 3, 4, 5 şi 12 (cu 9, 16, ± 25 şi 144 de căsuţe).

Un pătrat magic este numit bimagic dacă înlocuind fiecare număr cu pătratul său (puterea a doua) pătratul rămâne magic; de asemenea, un pătrat va fi trimagic dacă putem înlocui fiecare număr prin cubul său (puterea a treia) ş.a.m.d. Aceste pătrate se numesc multimagice.

Teoria pătratelor magice este un domeniu matematic înrudit cu teoria grupurilor de substituţie. Nu există nici un procedeu general pentru a alcătui un pătrat magic de un ordin oarecare. De la Loubere şi Bachet de Meziriac au dat fiecare câte un procedeu general pentru a construi pătrate magice de ordin impar. Devedec a dat o metodă ceva mai complicată pentru a construi pătrate magice de orice ordin impar. Maurice Kraitchik dă şi el o metodă generală bazată pe calculul modular pentru a face pătrate magice de orice ordin impar.

Nu există decât o singură combinare fundamentală a pătratului magic normal de ordinul 3; această combinare poate fi diversificată în 8 variante prin rotaţii, inversări şi substituiri ale coloanelor şi rândurilor. Dar, cu excepţia inversărilor, coloanele, rândurile şi chiar diagonalele sunt mereu aceleaşi. Aceste 8 pătrate magice normale de ordinul 3 (alcătuite din primele 9 = 3 x 3 numere) au toate constanta magică $15 = 3 \times \frac{(9+1)}{2}$, iar 5 ocupă întotdeauna căsuţa centrală. Dau un exemplu în stânga sus în planşa XVIII.

Dintre pătratele magice de ordinul 4 cu 16 căsuţe (constanta magică $4 \times \frac{(16+1)}{2} = 34($ îl dau ca exemplu pe cel mai faimos dintre pătratele magice asociate cu arta, cel care figurează în „Melancolia" lui Diirer, simetric faţă de „Soarele Negru", şi în care anul compunerii gravurii ,1514, este încrustat în cele 2 căsuţe mediane din ultimul rând.

Cea de-a treia figură din planşa XVIII este un pătrat magic de ordinul 5 şi constanta magică $5 \times \frac{(25+1)}{2} = 65$.

Cea de-a patra figură este un pătrat magic normal cu 144 de căsuţe, de ordinul 12, cu constanta magică

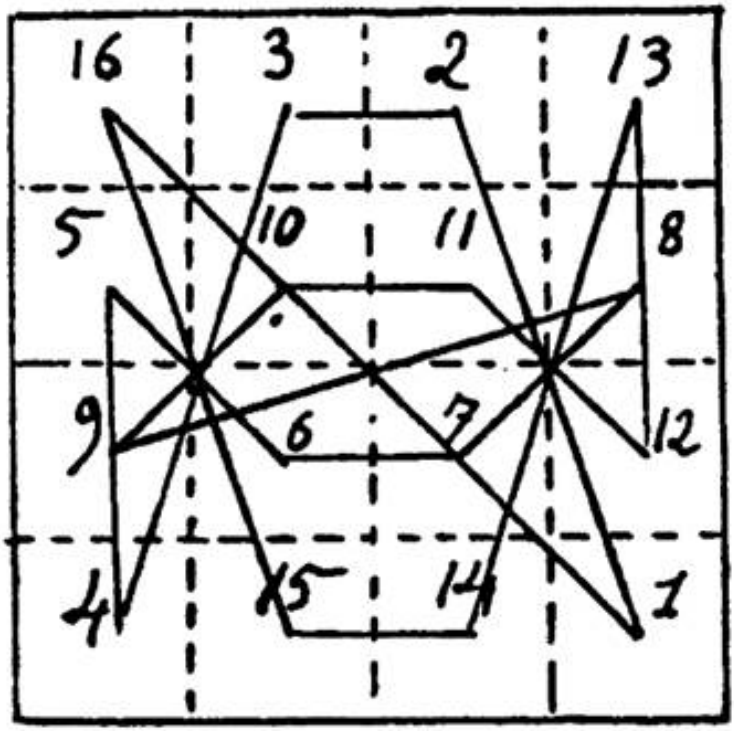
$$12 \times \frac{(144+1)}{2} = 870$$

Interesant la acest pătrat magic este faptul că este *compozit*, un pătrat magic compozit de ordinul $m \times n$ este un pătrat magic de ordinul m n care poate fi descompus în m^2 pătrate magice de ordinul n. Aici pătratul magic de ordinul 12 = 3x4 poate fi descompus în 4^2 = 16 pătrate magice de ordinul 3 cu 9 căsuţe. în mod firesc aceste pătrate de ordinul 3 nu sunt normale, adică nu sunt limitate la primele nouă numere, ci intră şi în şirul numerelor de la 1 la 144 (12^2). Iar „constantele lor magice" sunt diferite unele de altele întrucât elementele lor sunt toate diferite.

Acest pătrat magic compozit este datorat lui Royal V. Heath, colaborator al interesantei reviste americane *Scripta Mathematica.*

Pătratele magice au afinităţi sau zone comune nu numai cu teoria grupurilor de transformări şi de substituţii, şi cu teoria simetriei, ci şi cu arta decorativă şi cu estetica aplicată. Claude Bragdon, arhitect new-yorkez care s-a inspirat şi din proiecţiile politopilor (din cea de a patra dimensiune) pentru motive de covoare şi de lampioane convexe sau în formă de stea, s-a folosit pentru compoziţii ornamentale variate (pe care le mai numeşte şi projective ornament) de liniile magice oferite de pătratele magice. Aceste linii unesc, în ordinea mărimii începând cu unitatea (sau cu cel mai mic număr al pătratului dacă acesta nu este normal), toate centrele căsuţelor; figura alăturată oferă pentru pătratul magic al lui Diirer un exemplu de motive ciudate obţinute în acest fel. Pentru pătratele cu un număr foarte mare de căsuţe, aceste motive sunt într-adevăr surprinzătoare iar Bragdon, înlocuind dreptele cu nişte curbe, a obţinut nişte motive foarte frumoase, asemănătoare cu ornamentele celtice.

Numeroşii împătimiţi de pătrate magice nu s-au sfiit să treacă de la acestea la cuburile magice, al căror principiu este acelaşi, dar care sunt mai complicate, având 4 diagonale mari fără să mai punem la socoteală diagonalele celor 6 feţe pătrate. Englezii numesc cuburile magice „Nasik Cubes", după numele oraşului din India în care câţiva ofiţeri britanici şi-au ocupat timpul liber construindu-le; modelele lor din sticlă (de la Muzeul Ştiinţelor din Londra) par nişte blocuri de gheaţă în care sunt întemniţate regimente întregi de cifre roşii sau negre.



Carré de DÜRER
lignes magiques.

CAPITOLUL XIII

LOGISTICA-AXIOMATICILE LUI PEANO ŞI HILBERT - LOGICA CLASICĂ, LOGICA SIMBOLICĂ ŞI LOGICA POZITIVISTĂ

Logica a devenit fizica mulţimilor.
(GONSETH)

Am amintit mai înainte că după clasificarea adoptată astăzi de cei mai mulţi filosofi care se ocupă de matematică şi de matematicienii care se ocupă de filosofie, matematica şi logica fac parte dintr-o ştiinţă mai generală numită logistică, ea însăşi izvorând din teoria cunoaşterii sau epistemologie; matematica este, în această împărţire, ştiinţa tuturor ipotezelor coerente (care nu introduc contradicţii) posibile. în ceea ce o priveşte, fizica matematică încearcă să compună o imagine coerentă a lumii exterioare actuale, percepute, şi, datorită acestui fapt, a fost nevoită să se folosească din ce în ce mai mult disciplinele matematice şi logice abstracte care sunt: teoria tensorilor şi teoria grupurilor, despre care vom vorbi într-un alt capitol. Am văzut că uneori un domeniu matematic nou care pare a fi o pură distracţie a spiritului, o reverie abstractă, aruncă o lumină nouă şi precisă asupra aspectelor necunoscute ale lumii exterioare şi putem spune în paralel că Universul real se apropie mult mai mult de anumite universuri matematice abstracte, lumi neecludiene sau cu 4 dimensiuni, cohorte transfinite etc., decât de percepţiile în aparenţă concrete ale simţurilor noastre.

Am văzut, de asemenea, că definiţiile logistice ale Numerelor Divine şi ştiinţifice ale pitagoreicilor, numerele lui Nicomachos din Gerasa, semănau în mod straniu cu clasele de clase ale lui Whitehead şi Bertrand Russell[47]. Vom detalia în continuare două sisteme logistice simple care întemeiază unul aritmetica, celălalt geometria, prin postulate abstracte astfel încât nu rezultă nici o contradicţie din ele.

Primul sistem este axiomatica lui Peano, care construieşte teoria numerelor întregi şi întreaga aritmetică folosindu-se de 5 axiome sau postulate arbitrare:

1° Zero este un număr întreg;

2° Zero nu urmează nici unui număr întreg;

3° Orice număr întreg este urmat de un alt număr care este tot întreg;

4° Două numere întregi sunt egale dacă numerele care le urmează

sunt şi ele egale;

5° Principiul recurenţei sau al inducţiei totale: Dacă o proprietate este adevărată pentru numărul 1, şi dacă se stabileşte că este adevărată pentru N + 1 dacă este adevărată pentru N, atunci este adevărată pentru toate numerele întregi.

Principiul inducţiei totale nu este întemeiat pe raţionamentul deductiv silogistic, ci mai degrabă pe principiul analogiei, analogii succesive în relaţiile unui număr cu următorul. Putem, de altfel, socoti acest principiu al inducţiei totale ca o definiţie a numărului întreg, ceea ce Peano face implicit.

Paralel cu axiomatica lui Peano pentru aritmetică, o avem pe aceea a lui Hilbert, care este şi mai surprinzătoare, întrucât se foloseşte de convenţii *a priori* arbitrare în legătură cu entităţi abstracte, nedefinite, pentru a construi orice geometrie, domeniu în aparenţă concret. Mai întâi, Hilbert înlătură ideile, definiţiile sau imaginile pe care noi le asociem cu entităţile geometrice şi „gândeşte" 3 clase diferite de obiecte: obiectele din prima clasă vor fi numite puncte şi desemnate prin literele A, B, C ...; obiectele din cea de-a doua clasă vor fi numite drepte şi desemnate prin a, b, c ...; obiectele din cea de a treia clasă vor fi numite plane şi desemnate prin literele $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ Între puncte, drepte şi plane noi ne închipuim relaţii mutuale desemnate prin cuvinte ca „între", „a fi situat pe", „egal cu", „paralel", „continuu". Descrierea exactă şi complet suficientă pentru a construi întreaga geometrie este obţinută prin aceste relaţii şi prin 20 de axiome, dintre care una este axioma lui Euclid (despre paralele) dintre celelalte să citǎm de pildă:

1° Dacă un punct B se află între un punct A şi un punct C, atunci A, B, C, sunt trei puncte diferite pe o dreaptă, iar B se află şi între C şi A.

2° Dintre 3 puncte oarecare de pe o dreaptă, numai unul poate fi situat între celelalte două.

Una dintre cele 20 de axiome este axioma lui Arhimede, sau a continuului, a cărei definiţie o amintesc: „Dacă AB şi CD sunt două segmente de dreaptă oarecare, îl putem înmulţi pe CD cu un număr întreg destul de mare, aşa încât multiplul astfel obţinut să fie mai mare decât segmentul AB".

Sistemul care rezultă din aceste postulate este coerent şi poate fi urmărit logic de o persoană care nu are nici o noţiune despre spaţiul văzut. Vom întâlni mai departe un alt mod, la fel de abstract, de a aborda geometria, prin teoria grupurilor, care a ştiut, de asemenea, să pătrundă pe teritoriile celor mai multe discipline algebrice modeme.

Algebra este prin ea însăşi bazată pe folosirea simbolurilor,

simbolizând mărimi, numere sau operaţii aritmetice, dar putem numi algebră simbolică o parte din algebra în care nu numai aceste operaţii ci şi relaţiile dintre operaţii sunt exprimate prin simboluri. Această algebră simbolică este o parte din logica simbolică; la rândul ei, aceasta face parte din logistică, cuprinzând logica propriu-zisă şi ansamblul matematicilor. Totul, aşa cum am arătat până acum, face parte din epistemologie sau teoria cunoaşterii, preliminarii şi bază a filosofiei (pentru unii întreaga filosofie). Cu toate că logica nu se ocupă o priori de numere , o să explorăm puţin logica simbolică pentru a arăta legăturile ei cu matematica. Studiind noţiunile de raport şi de proporţie am văzut că percepţia unui raport de valori sau de mărimi, prin urmare comparaţia calitativă sau cantitativă, este operaţia fundamentală a puterii de judecata în general, pentru care raportul matematic sau fracţia este un caz particular. Am văzut de asemenea, că analogia, relaţia sau echivalenţa dintre două raporturi este o judecată de gradul doi, având drept caz particular proporţia geometrică.

O altă noţiune algebrică introdusă de Whitehead şi de Bertrand Russell în logistică şi logică este aceea de funcţie, $y = f_{(x)}$, unde $f_{(x)}$ este fie un polinom în x cu exponenţi şi coeficienţi întregi, fie o expresie algebrică oarecare, ce implică relaţia f între „variabila” *x* şi funcţia *y*. În logistică şi logică, acest concept devine cel de „funcţie propoziţională”...; „ X este un Y“ este o funcţie prepoziţională.

„Franţois Mauriac este un om” este, dimpotrivă, o propoziţie, înlocuind astfel pe X şi pe Y cu nişte „c”nstante" A şi B, termeni având un sens definit, am căpătat o propoziţie care poate fi adevărată sau falsă; dacă A şi B sunt valori coerente avem, ca în acest caz, o propoziţie adevărată. Dimpotrivă, „platina este o plantă” ne dă o propoziţie falsă. *Valorile* unei funcţii prepoziţionale în care s-au înlocuit variabilele cu constante sunt aşadar propoziţii. Confuzia între funcţii propoziţionale şi propoziţii aduce obscuritate şi neînţelegeri într-un text logic sau matematic. Postulatele sunt funcţii propoziţionale; axioma lui Hilbert de pildă: „două puncte determină o dreaptă”ă s-ar putea citi şi „doi x determină un y“, căci cuvintele punct şi dreaptă nu au fost definite. Teorema care exprimă o afirmaţie logică sau matematică este şi ea o funcţie propoziţională. Postulatele şi teoremele sunt legate prin implicaţie logică şi nu sunt nici adevărate, nici false. Totuşi, „P implică T” nu este o funcţie propoziţională, ci o propoziţie care este adevărată sau falsă; este o propoziţie *ipotetică*.

O propoziţie care nu este ipotetică este categorică. O propoziţie matematică este o propoziţie ipotetică definitivă; o propoziţie

ştiinţifică este o propoziţie categorică definitivă. Adevărul ştiinţific nu are altă dovadă decât observaţia, adevărul matematic nu are ca dovadă decât deducţia formală, se referă la formă, nu la conţinut. Matematica satisface curiozitatea în legătură cu ceea ce este logic posibil; curiozitatea ştiinţifică se ocupă de lumea actuală (care poate fi mai puţin reală decât lumea matematică). Aaevărul ştiinţific trăieşte în lumea *faptelor* propoziţionale, adevărul matematic în aceea a *formei* propoziţionale, cea dintâi având drept instrumente observaţia şi gândirea empirică, cea de-a doua deducţia şi inducţia, însă teoria matematică a invarianţei, de pildă, (ideea „permanenţei prin schimbări") are o influenţă uriaşă asupra cunoaşterii de către noi a lumii concrete.

Exemplu de implicaţie logico-matematică:

„Dacă fiecare x este un y şi fiecare y este un z, atunci orice x este un z"; aceasta nu este o funcţie propoziţională (în ciuda variabilelor) ci o adevărată propoziţie care este de altfel adevărată, o implicaţie independentă de conţinut.

Se poate spune că matematica este ştiinţa consecinţelor ipotezelor (a tuturor consecinţelor posibile ale tuturor ipotezelor coerente); domeniul său coincide cu cel al „implicaţiei logice".

Dimpotrivă, domeniul ştiinţei este cel al tuturor întrebărilor privitoare la lumea actuală, vie sau nevie, organică sau anorganică, materială sau imaterială, fizică sau psihică. Iată două definiţii ale logicii date de Peirce, unul dintre precursorii logicii simbolice de astăzi:

„Logica este teoria gândirii controlate, ştiinţa legilor generale despre «semne şi simboluri»."

Şi:

„Logica este teoria judecăţii corecte"

Tot Peirce a născocit, între altele, cuvântul pragmatism[48].

El a mai scris:

„Există ceva în natură cu care este analog spiritul omenesc. Natura fecundează spiritul omenesc, sugerează idei care dezvoltându-se se aseamănă cu mama lor, natura".

Ecou îndepărtat, dar precis al principiului analogiei al lui Pythagoras şi prefigurare a declaraţiei lui Eddington care afirma că structura universului este conformă cu teoria grupurilor, şi la fel cea a gândirii omeneşti.

Matematicianul îşi aminteşte de peştera lui Platon şi pentru el ceea ce este veşnic este o lume, un cosmos în care universul existenţei actuale nu este nimic altceva decât un „loc geometric" arbitrar sau un vis; ţelul pe care-1 urmăreşte este să descopere lumea reală, soarele care proiectează umbrele pe zidul peşterii.

În ceea ce-1 priveşte pe logicianul pur, acesta ar fi ispitit să spună

că *structura* unui limbaj logic desăvârşit ar putea fi asemănătoare cu structura lumii (ar exista acelaşi „motiv" în relaţiile dintre termenii unei propoziţii ca şi între relaţiile dintre entităţile desemnate prin aceşti termeni. Iarăşi analogie).

Şi astfel ajungem la şcoala logicienilor pozitivişti sau empirişti (urmaşi ai faimoasei „Şcoli de la Viena") care au încercat să elimine filosofia şi metafizica în folosul unei „Sintaxe logice" sau logică sintactică şi care acordă, pe deasupra, o importanţă capitală analizei semnificaţiei cuvintelor şi legăturilor dintre ele.

Ea a introdus în studiul limbajului o distincţie între limbajul ştiinţelor şi limbajul emotiv, acesta din urmă fiind pentru ei lipsit de sens. Deducţiile lor se pierd, în general, într-o logică simbolică confuză şi câteodată arbitrară. Dihotomia limbajului este imperfectă dacă o comparăm cu aceea, precisă şi limpede, stabilită de Pius Servien care l-a clasificat în „limbaj al ştiinţelor" şi „limbaj liric"; metoda lui Pius Servien rezolvă cu uşurinţă toate problemele în care se împotmoleşte „logica pozitivistă".0 vom vedea în amănunt în capitolul care se ocupă îndeosebi de numere şi de ritm în limbaj.

Logica normală foloseşte trei forme de raţionament (de metode pentru a dobândi judecăţi corecte):

1° Prin silogism (raţionament deductiv static); identificarea parţială a unui individ sau a unui grup ca făcând parte dintr-o clasă, ţinând de proprietăţile sale. Este metoda analitică, ba chiar tautologică, care nu adaugă nimic nou conţinutului iniţial. De fapt, silogismul este o tautologie voalată, dar în ciuda acestui fapt rămâne un procedeu de raţionament foarte util întrucât este „exhaustiv", epuizează anumite posibilităţi logice care fără el ar putea fi trecute cu vederea şi elimină automat contradicţiile[49].

Exemplu de enunţ tautologic (decurgând din definiţii prealabile): „Orice bucată de fier este o bucată de metal." Şi un enunţ empiric (netautologic):

„Toate bucăţile de fier de pe această masă sunt rotunde".

2° Raţionament prin analogie, identificare a două relaţii sau a două structuri; este un raţionament „dinamic" care lărgeşte conţinutul. Principiul inducţiei totale este un raţionament analogic inductiv.

3° Raţionament prin analiză combinatorie. Este metoda chinezească folosită de Yi-Jing sau Cartea Schimbărilor (cap.VIII); este înrudită mai degrabă cu silogismul, cu metoda deductivă, prin aceea că în anumite cazuri este exhaustivă, produce toate combinările posibile şi permite eliminarea combinărilor de prisos.

Raţionamentul deductiv silogistic se potriveşte cel mai bine cu tehnica logicii simbolice sau algebrice întrucât foloseşte un simbolism analog cu cel al algebrei propriu-zise. simbolurile logicii silogistice clasice le precedă pe cele ale logicii simbolice moderne; am să prezint

în continuare pe scurt câteva dintre acestea, moştenite de la metodele scolastice. Teoria silogismului clasic stabileşte mai întâi patru forme, A, E, I, O, de enunţuri existenţiale, patru tipuri de ceea ce numim astăzi „funcţii propoziţionale".

A Orice S este P
E Nici un S nu este P
I Unii S sunt P
O Unii S nu sunt P

Orice element al unui silogism categoric trebuie să aibă una din formele A, E, I, O.

Primul principiu scolastic al silogismului spune: „Orice este atribuit în mod afirmativ sau negativ unui termen care figurează în silogism poate fi atribuit în acelaşi fel fiecărui lucru conţinut în clasa specificată de acest termen".

Aristotel: *Dictum de omnis et nullo.* „Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et singulis; quidquid de nullo valet, nec de quibusdam et singulis valet".

Acest dicton, „de omnis et nullo", stabileşte un raport de dependenţă între primul, al doilea şi al treilea termen al silogismului. Al doilea principiu (enunţat tot de Aristotel) este, „principiul de coeziune" (raport de echivalenţă între doi dintre cei trei termeni dacă silogismul este cu concluzie afirmativă, dar negându-1 pe al treilea când silogismul este cu concluzie negativă):

„Nota notae est etiam nota rei ipsius; repugnans notae repugnat rei ipsi" (Nota înseamnă, alternativ, termenul silogismului şi afirmaţia sau negaţia exprimată prin el).

Cele patru tipuri A, E, I, O aranjate în grupuri de câte trei (cu repetiţii) produc 64 de moduri (combinare de patru obiecte luate câte trei,$4^3 = 64$).

De exemplu: A A A

clasicul: *Toţi oamenii sunt muritori.*
Socrate este un om.
Socrate este muritor.

Ca structură avem: premisă majoră, premisă minoră, concluzie. Dintre cele 64 de moduri menţionate mai înainte (combinări de câte trei luate câtre trei ale celor patru elemente A, E, I, O) numai o minoritate de 19 este teoretic validă; eliminând identităţile şi modurile zise subalterne, rămân 11 moduri diferite practice:

AAA, EAE, AII, EIO, AEE, AOA, AAI, IAI, EAO, OAO, AEO. Toate acestea au fost condensate în ingeniosul poem în pseudolatină macaronadică:

Barbara Celarent Darii Ferio *Prioris*
Cesare Camestres Festino Baroko *Secundae*

Tertia Darapti Disamis Datisi Felapton
Bokardo Ferison *habet quarto insupra addit*
Bramantip Camenes Dimaris Fesapo Fredison

(Combinaţia AEO, „validă însă subalternă”, nu figurează în „poem”.)

În fiecare cuvânt numai vocalele contează (cuvintele subliniate nu contează) alcătuind astfel grupurile sau modurile AAA, EAE etc. întâmplător, simbolurile A, E, I, O sunt socotite a fi ieşit din Afflrmo şi nEgO.

Combinaţiile din rândul care începe cu cuvântul *Barbara* alcătuiesc prima figură a silogismului, cele din rândul care începe cu *Cesare* pe cea de a doua, cele din rândul care începe cu *Darapti* (Tertia nu intră la socoteală) pe o a treia, cea din rândul care începe cu Bramantip alcătuieşte a patra figură.

De exemplu: C**elare**nt

E Nici un lucru plictisitor nu este popular.
A Orice muncă de rutină este plictisitoare.
E Nici o muncă de rutină nu este populară.

F**esti**n**o**

E Oamenii buni nu sunt niciodată cinici.
I Unii oameni de geniu sunt cinici.
O Unii oameni de geniu nu sunt buni.

F**elap**t**o**n

E Nici un tratat de logică nu este o lectură uşoară.
A Orice roman este o lectură uşoară.
O Unele tratate de logică nu sunt romane.

(O este adevărat, dar incomplet; rezultă din premise că nici un tratat de logică nu este un roman.)

Logica simbolică modernă se foloseşte de simboluri pseudoalgebrice:

•	și ... conjuncție
V	sau ... Disjuncție
⊃	implică... implicație (Dacă... atunci)
—, ~	nu... negație
(x)	pentru orice x
f(x)	ca în algebră, funcție de x
σ	... un enunț
∃	... există
≡	... echivalență
=	... identitate

$M(P)$ P este M (proprietatea sau calitatea P are şi proprietatea M

Iată cum se scriu, de pildă, cele patru tipuri ale elementelor silogismului, A, E, I, O:

A: orice S este P (x) (f x $\supset$ g x

E: nici un S nu este P(x) (f x $\supset$ -g x).

I: unii S sunt P ($\exists$ x) (f x • g x)

O: unii S nu sunt P ($\exists$ x) f x V g x).

Funcţiile f şi g semnifică: x aparţine clasei (definită de funcţiile f sau g).

Principiul Terţiului Exclus (nu se poate în acelaşi timp A şi non A) se scrie σ_{1V} -σ_1.

O axiomă logică şi algebrică:

„Dacă enunţul 1 implică enunţul 2 şi dacă 2 îl implică pe 3, atunci 1 îl implică pe 3“ este simbolizată prin:

$$(\sigma_1 \supset \sigma_{2)} \cdot (\sigma_2 \supset \sigma_{3)} \sigma_1 \supset \sigma_{3)}$$

„Tabelele de adevăr” se combină cu enunţurile „moleculare”[50] şi joacă un rol însemnat în analiza logică a logicienilor pozitivişti din Şcoala de la Viena şi din filialele acesteia stabilite acum în universităţile americane (în frunte cu Carnap, Wittgenstein etc.).

Exemplu: dacă p şi q sunt două propoziţii, dacă V înseamnă *sau* deasupra coloanelor, dar „*este adevărat*” în coloane şi F înseamnă „*este fals*”, atunci vom avea „tabelul de adevăr":

p	q	p . q	pVq	p ⊃ q
V	V	V	V	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	F	F	F	V

Aceste „tabele de adevăr”: sunt în general întemeiate pe logica bivalentă şi admit principiul contradicţiei şi pe cel al terţiului exclus. Dacă în loc de două propoziţii p şi q avem trei, p, q şi r, tabelul va avea $2^3 = 8$ rânduri; dacă avem 4 propoziţii, vom avea $2^4 = 16$ rânduri etc.

Boole, cu lucrarea sa „Enquete sur Ies lois de la pensee“ (1854), a fost întemeietorul logicii simbolice.

Primele două coloane constituie premisele sau ipotezele simultane care anunţă fapte afirmate sau presupuse pentru propoziţiile p şi q, ultimele două coloane dau rezultate logice privitor la adevărul sau neadevărul lui p şi q, luate împreună sau la unul sau altul din cele două enunţuri.

Să notăm că logica modernă a ridicat numărul modurilor silogistice posibile de la $4^3 = 64$ la $2^{13} = 64 \times 128 = 8.192$

În ciuda mecanismelor tautologice ale raţionamentului silogistic, logica simbolică modernă a scos de aici unele rezultate folositoare datorită facultăţilor „exhaustive” şi eliminatorii ale procedeului.

Însă ambiţia Şcolii de la Viena de a înlocui filosofia şi metafizica cu analiza simbolică „sintactică” şi cu observaţii empirice obiective a dat greş pentru bunul motiv că, după cum ştim, mecanica silogistică nu dă niciodată ca rezultat altceva decât ce i s-a dat la început (la fel ca distribuitoarele automate din gări) şi pentru că afirmaţia logicienilor pozitivişti, potrivit căreia toate cunoştinţele pot fi obţinute şi clasificate ca urmare a acestor calcule silogistice, tautologice, pe de o parte, ca nişte observaţii ştiinţifice empirice, obiective, pe de alta, ignoră faptul că observaţiile ştiinţifice în discuţie (calificate cu termenul, prost ales de empirice în cinstea empirismului materialist al lui Locke etc.) sunt, în ultimă instanţă subiective întrucât vin de la observatorul care trebuie să citească şi să coordoneze indicaţiile date

de instrumente.

Camap, şeful Şcolii de la Viena reconstituite, un om remarcabil de altfel, citează trei feluri de a enunţa o propoziţie: modul obiectiv (al „bunului simţ"), modul material (pe care îl numeşte *semantic*) şi modul *sintactic* sau formal, cel pe care-1 recomandă.

Iată exemple de diferite enunţuri după cele trei moduri:

Modul obiectiv	Modul semantic	Modul formal sau sintactic
5 este un număr prim.	5 nu este un lucru ci un număr.	5 nu este un lucru–număr ci un cuvânt–număr.
Babilon era un oraș mare.	Babilon a fost menționat în conferința de ieri.	Cuvântul „Babilon" a fost folosit în conferința de ieri.

Sau

în loc de:	trebuie spus:
Lumea este ansamblul global al faptelor, nu al lucrurilor (modul semantic).	Știința este un ansamblu de propoziții și nu de nume.

Las cititorului grija de a aprecia eventualele avantaje ale modului sintactic.

Una dintre afirmaţiile doctrinare ale logicienilor pozitivişti este aceea că orice enunţ trebuie să fie făcut la modul (gramatical) indicativ, pentru a putea afirma astfel rigoarea propoziţiilor lor „empirice" („Un enunţ valabil este o informaţie care poate fi comunicată la modul indicativ". Exemplu: Ceci rouge maintenant). Ei citează şi butada lui Poincare: „Dintr-un indicativ nu poţi deduce un imperativ", aceasta pentru a exclude din filosofia lor nu numai subiectivitatea observatorilor, ci şi orice etică sau morală normativă categorică. Etica şi morala nu îşi au locul în enunţurile lor tautologice sau empirice. În felul acesta, filosofia lor devenise un materialism îngust, nu dialectic, ci sintactic (întemeiat pe sintaxă şi pe înţelesul cuvintelor şi al propoziţiilor); recent însă Camap şi-a dat seama de impasul în care acest fanatism antimetafizic împinsese grupul său şi a deschis o breşă prin care subiectul gânditor şi chiar metafizica s-au întors triumfători (el a acordat o valoare probantă modului semantic) [51].

La urma urmei, *Cogito ergo sum* este experienţa „empirică" fundamentală şi totodată baza metafizicii.

Între timp, discipolii lui Camap construiseră cu multă râvnă un „calcul metapropoziţional” care cuprindea atât „metamatematica”, cât şi „metalogica” fără să mai punem la socoteală „semantica” şi semiotica.

Ar fi nedrept să pretindem că logica pozitivistă nu a adus nici un serviciu epistemologiei; insistenţa ei asupra rolului însemnat al semnificaţiei exacte a cuvintelor şi a frazelor, cât şi analiza meticuloasă a definiţiilor adevărului şi falsului[52] s-au bucurat de o mare influenţă[53]7.

„Semantica generală” vrea să fie „o tehnică psihologică cu rolul de a-i ajuta pe oameni să se întrebe: „De fapt, ce vreau să spun?” întrebarea „Despre ce este vorba”? a lui Foch.) Şi dacă ne întoarcem de la logica pozitivistă la logica propriu-zisă este de prisos să insistăm asupra însemnatelor foloase pe care teoriile şi notaţiile lui Whitehead, Russell, Couturat, Peano, Hilbert, Dedekind le-au adus ştiinţei matematice şi teoriei cunoaşterii în general.

Tot aşa cum am văzut ivindu-se geometrii neecludiene şi nearhimedice, tot aşa unii logicieni pozitivişti (Reichenbach, Korzybski) au născocit logici nearistotelice, înlăturând de pildă principiul terţiului exclus. Să citărn logica trivalentă a lui Reichenbach, care admite trei nuanţe ale adevărului: adevăratul, falsul şi nedeterminatul. Aici $\neg\neg B$ înseamnă: B este nedeterminat. $A \vee \neg A \rightarrow \neg\neg B$ înseamnă: Dacă A este adevărat sau fals, B este nedeterminat. Există chiar şi logici „polivalente”, în care adevăratul este difractat prin prisma analizei în procentaje variate care introduc probabilităţile. Toate acestea sunt, de altfel, întrutotul legitime.

Şi totuşi raţionamentul analogic, fiind deosebit de formulele silogistice, a câştigat în ultima vreme teren. Logiciana engleză Dorothy Emmett afirmă că:

„Cele mai multe dintre raţionamentele sau postulatele metafizice, religioase, estetice, ştiinţifice, istorice sunt efectuate «în mod analogic». Faţă de gândirea analitică, silogistică, gândirea analogică este transcendentă, extrapolantă; este selectivă şi poate «prevedea»; dimpotrivă, tehnica silogistică este alcătuită din tautologii sau mai degrabă din truisme obţinute prin substituiri şi eliminări".

Paul Claudel spunea:

„Logica veche avea drept instrument silogismul, aceasta din urmă are metafora”.

Or, cine zice metaforă zice analogie.

Pentru a încheia aceste consideraţii despre logica simbolică, să mai dăm un exemplu de logică sau mai degrabă de metafizică combinatorie, exemplu luat din Yoga brahmano-budhistă, în care, la fel ca A, E, I, O, din logistica scolastică sau precum cele 8 trigrame

magice din Yi-Jing, cele trei sunete A, U, M (sunetele, iar nu imaginile) dau, prin combinări, cheia adevărurilor esenţiale.

Aici A este Eul

U este Noneul

M este Negaţia.

CAPITOLUL XIV

CIBERNETICA

„Ce ţi-e şi cu demonul analogiei abstracte! De-aţi şti prin ce chinuri mă face uneori să trec! îmi şoptea să compar transformarea de nedescris care se petrecea în mine cu o schimbare bruscă a unor probabilităţi mentale“
(Paul VALERY, Monsieur Teste, Scrisoare de la un prieten)

Vom aborda în acest capitol, sau mai degrabă vom vorbi în treacăt despre o nouă ştiinţă, Cibernetica, numită după cuvântul grecesc kubernhthV („omul care ţine bara cârmei”, cuvântul are ecourile: cârmă, cârmuire), ştiinţa care calculează, construieşte şi studiază noile maşini de calculat, am fi ispitiţi să scriem „maşini de gândit” sau măcar „de raţionat logic”.

În lucrările de sinteză consacrate acestor maşini, autorii au adăugat, pe lângă simple descrieri tehnice, consideraţii psihologice şi chiar filosofice despre unele asemănări între modul de funcţionare al acestor maşini şi cel al creierului uman.

Pe când visa la „analiza sa combinatorie", logică simbolică universală care să-i ofere enunţurile tuturor ipotezelor posibile, ştiinţifice şi filosofice, Leibniz se gândise şi la un instrument, o maşină care să execute operaţiile mecanice necesare. Logisticienii moderni au clădit, până la un anumit punct, analiza combinatorie ideală la care năzuia Leibniz; el ar fi fost cu siguranţă încântat de axiomaticile lui Peano şi ale lui Hilbert şi de legiunile transfinite ale lui Cantor. Cât despre „maşina de raţionat corect”, aceasta există şi constituie obiectul noii ştiinţe căreia îi este închinat acest capitol. Cel care a inventat-o şi aproape că a realizat-o a fost un ofiţer de artilerie britanic, colonelul Babbage, care, în a doua jumătate a secolului al XlX-lea, şi-a închipuit mai întâi o maşină de calculat bazată pe calculul diferenţelor întregi (calculul despre care am pomenit în legătură cu Numerele Figurate ale anticilor şi cu „gnomonii” lor).

Nu era vorba aici doar de a mânui şiruri de numere întregi, luate arbitrar, ci şi despre funcţiile algebrice de forma y = f(x), în care i se atribuia lui x valori întregi succesive şi se stabilea cu ajutorul maşinii suita de diferenţe Δy valorilor succesive corespunzătoare ale funcţiei y. Este un procedeu analog cu diferenţierea propriu-zisă, dy, numai că rămânem în domeniul întregului finit în loc să ajungem în acela al infinitului mic; simbolurile sunt $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ pentru diferenţele

prime, secunde etc.

De exemplu $y = f(x) = x^2$.

x	y	Δ_1	Δ_2	Δ_3
1	1			
2	4	3		
3	9	5	2	
4	16	7	2	0
5	25	9	2	0
6	36	11	2	0
7	49	13	2	0

Diferenţele secunde sunt diferenţele diferenţelor prime ş.a.m.d.; întrucât avem o funcţie de gradul al II-lea, diferenţele secunde sunt constante (egale cu 2) ca în diferenţierea propriu-zisă. Aceste şiruri ne dau informaţii foarte precise despre structura funcţiei, mai complete într-un anumit sens decât simpla $dy = 2x \times dx$ dată de calculul diferenţial propriu-zis (cel care foloseşte infiniturile mici). Vedem, totodată, că plecând de la Δ_3 şi executând operaţia inversă celei care a dat diferenţele prime, secunde, terţe, putem obţine, printr-un fel de integrare a valorilor întregi, suita de valori a funcţiei $y = f(x)$.

Aceste integrări şi diferenţieri în numere întregi i-au îngăduit lui Babbage să construiască o maşină care nu numai că aduna şi înmulţea, prin sistemul simplu de cilindri cu angrenaje care permiteau trecerea de la unităţi la zeci, apoi la sute etc ... (sistem analog cu cel al contoarelor de la taxiuri), ci şi producea, într-un mod mai subtil, şirurile de diferenţe ale oricărei funcţii cu coeficienţi algebrici raţionali, pentru valorile întregi ale variabilei şi invers. Maşina lui Babbage, ireproşabilă ca principiu, era, din păcate, foarte stânjenitoare, opera cu încetineală şi costa foarte mult; Parlamentul Britanic, după ce a aprobat o sumă preliminară destul de însemnată pentru a începe construirea unei părţi a elementelor (construcţie care a durat vreo zece ani), a uitat cu totul de colonelul Babbage şi maşina sa, ale cărei teorii despre cilindri dinţaţi acoperiţi de cifre negre se află şi acum, învăluite în tristeţe, în Muzeul Ştiinţelor din Londra. însă imaginaţia lui Babbage nu se mărginise la maşina de calculat; în ciuda nepăsării guvernelor care au urmat şi-a consacrat apoi viaţa, studiului unui proiect şi mai ambiţios, acela al unei maşini logice, o maşină care

să poată raţiona prin silogisme şi care, hrănită cu premise, ar scoate concluziile. Aici Babbage a fost cu adevărat un precursor, căci pentru a introduce în maşină datele unei probleme logice sau matematice şi a o pune în „mişcare dirijată", născocise un sistem de cartoane perforate, în găurile cărora se introduceau pârghii care făceau înregistrarea şi operaţiile; poziţiile reciproce şi distanţele dintre găuri, care grupau pârghiile într-un mod determinat, comandau desfăşurarea operaţiilor care, după ce maşina era pusă în mişcare, scoteau concluzia sau rezultatul într-o constelaţie de găuri sau de puncte pe care nu-ţi mai rămânea decât să le descifrezi. Din păcate, nici un mecena nu s-a interesat de colonel, Parlamentul n-a vrut să mai audă de el şi nici de invenţiile lui ciudate, iar maşina de raţionat nu a fost niciodată construită.

Totuşi, aşa cum am spus mai înainte, concepţia lui Babbage era corectă; ideea cartelelor sau a plăcilor perforate este aplicată în mod curent în zilele noastre, iar de cartoane sau de benzi perforate se folosesc nu numai maşinile de calculat, de diferenţiat sau de integrat etc., care funcţionează adesea în virtutea diferenţelor prime ale lui Babbage, ci şi maşinile logice, capabile să coordoneze raţional datele unei probleme matematice sau logice şi să le rezolve.

„Supercreierul" de la Harvard (anglo-saxonii le mai zic acestor maşini „Creiere electronice" sau „roboţi matematici"), de pildă, calculează cele mai complicate funcţii trigonometrice şi hiperbolice ca şi funcţiile de funcţii, integrează orice curbă, rezolvă ecuaţii algebrice simultane sau ecuaţii diferenţiale, se foloseşte de logaritmi, rezolvă în 19 ore o problemă care ar cere o lună de lucru unui număr de patru experţi ce muncesc împreună. Această maşină are 800 km de conductori, 3500 de relee cu 2225 de contacte, 1464 de comutatoare cu 10 poli şi 72 de maşini subalterne adiţionate; precizia rezultatelor este de ordinul a 23 de zecimale.

Înainte ca maşina să se pună în mişcare, „programatorul" inserează o bandă perforată după un cod care transformă în grupuri de puncte simbolurile matematice sau logice necesare, elemente, date şi operaţii conexe.

Să notăm că motoarele aservite auxiliare, numite pe marile nave servo-motoare, care, printr-o manetă pe un mic cadran transmit maşinilor sau cârmei un ordin precis, declanşează energia necesară executării şi o determină, sunt în oarecare măsură precusori ai „roboţilor" moderni; ele transmit cu cheltuială infimă de energie nu numai indicaţia, ci şi forţa dirijată şi controlată care face să se execute ordinul printr-un motor de mare putere.

Dintre „maşinile savante" de astăzi, să mai pomenin E.N.I.A.C-ul (Electronic Numerical Integrator and Calculator) de la Universitatea din Philadelphia. O maşină de acest fel permite să se rezolve rapid

probleme mult mai complicate decât cele obişnuite de algebră şi de analiză matematică; este excelentă în probleme de analiză combinatorie, poate enumera de pildă specificaţiile celor 230 de reţele cristaline şi rezolvă cu succes probleme de logică pură. „Maestrul programator", îmblânzitorul care îi transmite problemele şi întrebările, îi poate ordona dinainte să examineze succesiv mai multe probleme diferite în care elementele uneia depind de rezultatele problemei anterioare sau (fapt care apropie şi mai mult acest control întârziat de gândirea logică) să modifice în timpul rezolvării problemei instrucţiunile generale primite la început pentru a introduce un element nou, neaşteptat sau necunoscut iniţial; acest lucru pare să îi confere maşinii facultatea de a lua hotărâri de care doar ea este răspunzătoare.

Maşinile de calculat electronice sunt folosite pentru a satisface cererea sporită de mijloace de rezolvare rapidă a nenumăratelor probleme ridicate de cercetarea ştiinţifică şi de industrie. în general, aceste maşini folosesc numerotaţia binară redusă la cele două numere 1 şi 0, un impuls pentru 1, o pauză pentru 0. Impulsurile electrice sortite a fi „memorate" sunt convertite de nişte lămpi în unde ultrasonice într-o coloană de mercur, circuit închis prin care trec până ce vor fi rechiziţionate. Aceasta permite o „memorie" de 8.000 de elemente, care mai poate fi multiplicată de către un înregistrator cu bandă magnetică.

Este pe cale de a fi construită o maşină de jucat şah; la Expoziţia centenară (1951) de la Londra am văzut funcţionând o maşină de jucat dame, juca partide cu oameni din public care se înghesuiau în jurul ei (se pare că maşina pierdea la jucătorii buni, câştiga la cei mediocri, era de fapt de putere medie, nu făcea greşeli, dar era lipsită de imaginaţie). După cum o arată şi numele, „creierele electronice" modeme folosesc atât lămpi electronice (cu miile uneori, ceea ce le face să calculeze cu viteze ameţitoare), cât şi celule fotoelectrice; metoda care le îngăduie să aleagă între o soluţie avantajoasă sau o mişcare favorabilă şi o soluţie sau o mişcare defavorabile este aceea a calculului probabilităţilor. Ele au în vedere mai multe soluţii sau mişcări posibile şi o aleg pe aceea ale cărei consecinţe previzibile într-un spaţiu de timp limitat implică cel mai mic risc. Acest gen de operaţie se apropie ciudat de mult de funcţionarea creierului omului şi al animalului; este un fel de organ de „pariu mutual", de totalizator de şanse; atât animalul, cât şi jucătorul este deseori pus în situaţia de a alege între nişte reacţii care ajung fie la outsider-ul bine cotat, fie la favoritul mai puţin cotat.

Nu este de mirare că aceste maşini logice au fost studiate de savanţi interesaţi nu numai de rezultatele lor practice, ci şi de lumina pe care ar putea-o arunca asupra modului de funcţionare a gândirii

sau măcar a creierului omenesc. Ei au constatat că această metodă de a alege între probabilităţi diferite este mai apropiată de funcţionarea circuitului nervos decât era mecanismul unei centrale telefonice, comparaţie mult îndrăgită de generaţia precedentă. De fapt, aşa cum arată Norbert Wiener (*Cybemetics*, New York, John Willy and Sons), maşina ultrarapidă de calculat reprezintă probabil un model aproape ideal al felului în care se pun problemele legate de alegere şi felul în care sunt tratate în sistemul creier-circuit nervos. Caracterul „totul sau nimic" (da sau nu) al descărcării de neuroni este analog cu disciplina „sensului unic" aferentă folosirii numeraţiei binare (în baza 2), uzuală la cele mai perfecţionate maşini de calulat.

Toate acestea ne duc, printr-un lung ocol, la număr şi în mod deosebit la numărul doi ca bază a numeraţiei binare[54].

Această corespondenţă între funcţionarea neuronilor puşi la lucru printr-o alegere sau o hotărâre a judecăţii şi utilitatea folosirii notaţiei binare la maşinile de calculat, excluzând oricare altă notaţie (datorată faptului că în amândouă cazurile alegerea este limitată la un „da sau nu", circuit deschis sau circuit închis), a fost remarcată de către toţi psihologii care se ocupă de cibernetică şi admitem acum că creierul omenesc se foloseşte intuitiv de numeraţia binară. Sau, pentru „teleologicieni" (sau, mai scurt, teleologi): „Natura, care a născocit înaintea omului maşinăriile cele mai diverse : clopote scufundătoare, giroscop, baterii electrice, ferăstraie, zăvoare, cornete acustice, supape, undiţe etc., a născocit şi a aplicat numeraţia binară în funcţionarea creierului omenesc".

Această constatare nu are doar un interes psihologic, ci şi un uriaş interes practic, deoarece, aşa cum s-a arătat, tot acest mecanism de alegere prin maşină poate fi redus la două stări ale circuitului electric sau mai degrabă electronic (incluzând lămpile catodice), circuit deschis sau circuit închis, corespunzând cifrelor 1 sau 0 din notaţia binară. Să notăm că maşinile de calcul folosesc, în afară de numeraţia binară, logica *bivalentă* clasică, aristotelică, care se adaptează şi ea problemelor, căutând „soluţii favorabile"; nu ştim de ce ar fi în stare o maşină „de gândit" care foloseşte logicile trivalente sau polivalente ale lui Korzybski sau Reichenberg. întrucât aceste maşini de calculat sau creiere electronice pot astăzi să înregistreze, asemeni unei memorii conştiente un stoc de rezultate matematice sau logice şi la nevoie să apeleze la ele dacă dezvoltarea calculului sau a raţionamentului o cere, aceste asemănări între funcţionarea creierului omenesc şi cea a maşinii au atras, după cum era şi firesc, pe de o parte atenţia psihologilor dornici să exploreze, datorită examinării anumitor analogii, straturile conştiente sau subconştiente ale psihismului omenesc, pe de alta pe aceea a filosofilor care căutau să perceapă dacă între om şi maşina savantă există diferenţe fundamentale sau dacă ar

fi cu putinţă să construieşti treptat maşini... aproape omeneşti. Aproape... vii.

Partizanii *Gestalttheorie*-i materialiste, aceea pentru care o „constelaţie" de elemente pur fizico-chimice poate, prin simplul fapt al structurii sale „favorabile", să se transforme din mozaic inert în entitate organizată, să dea semne de pseudoviaţă (viaţa este cu adevărat pentru această şcoală un epifenomen, un miraj care nu se deosebeşte prin nimic esenţial de ne viaţă, de materia neorganizată, cu excepţia ciudatei calităţi de a produce iluzia transcendenţei sale faţă de această materie neorganizată) sunt încântaţi să-i vadă pe inginerii cibemeticieni producând „constelaţii", maşini „aproape omeneşti" care par să le confirme teoria. De fapt, crearea „maşinilor savante" ar oferi mai degrabă un argument adversarilor vitalişti ai „*Gestalttheorie*-i"; dacă o constelaţie, un aranjament „favorabil", voit sau nu, ar avea ca aranjament, cea mai mică influenţă integrantă asupra elementelor sale, maşinile despre care este vorba ar trebui să manifeste calităţi de viaţă sau de inteligenţă care să le depăşească pe acelea pe care constructorul le prevăzuse. O maşină de raţionat în mod silogistic ar produce dintr-o dată, într-un avânt sintetic, principiul inducţiei totale sau, mângâiată de o adiere lirică neaşteptată, favorizată de starea electrică a atmosferei, o alta ar compune spontan un poem[55]. Adevărul este că există întotdeauna o diferenţă esenţială între om şi roboţii construiţi de om; tot ceea ce roboţii oferă sau construiesc în ordinea inteligenţei a fost pus în ei dinainte (precum conţinutul distribuitoarelor automate despre care am mai vorbit), căci judecata lor are întotdeauna un caracter silogistic, rezultatul este conţinut în datele problemei tot aşa cum concluzia este conţinută în premisele silogismului. [Şi totuşi, robotul care joacă şah sau dame pare, la prima vedere, că introduce ceva neprevăzut datorită căutării şi selectării probabilităţilor favorabile. Oare şi acestea sunt conţinute toate aici în poziţiile iniţiale ale pieselor? Da şi nu[56].]

Să-l citǎm pe un filosof care a studiat psihologia „maşinilor savante" (Prof. Jefferson în Hibbert Journal, octombrie 1949):

„Numai atunci când o maşină va putea compune un sonet sau un concert ca urmare a gândurilor şi a emoţiilor formulate şi resimţite de ea, şi nu prin asocierea accidentală de simboluri, vom putea spune că maşina este echivalentă cu creierul, adică poate nu numai să scrie ceva coerent, ci şi să ştie că a scris. Putem desigur aduna „amintiri" matematice sau logice într-o maşină..., dar nici un mecanism nu poate simţi plăcere atunci când are succes (cu toate că poate fi dresat să o arate în mod automat), neplăcere din pricina unei greşeli de calcul sau a unei lămpi care s-a ars, nu poate fi atins de linguşeală, nu poate fi atras sexual, nu se poate mânia." Trebuie totuşi să amintim aici un fenomen, atât neaşteptat pe cât de amuzant, aproape comic: dacă-i

dăm unei maşini un ordin cu neputinţă de executat în condiţiile logice ale funcţionării sale, de pildă ordinul de a împărţi o cantitate finită la zero, atunci maşina sau una dintre părţile sale poate exploda, siguranţele se pot arde, catastrofă care aduce în mod ciudat o criză de nervi, o extraordinară nervous breakdown. Aceste „crize de nervi", care îi înveselesc pe psihologi, dar nu şi pe tehnicienii care se ocupă de întreţinerea maşinilor savante, le apropie cel mai mult de om[57]. Deosebirea esenţială pare a fi aceea că maşina constituie un şir de operaţii logice care nu se recunoaşte ca şir (spre deosebire de conştiinţa umană care, chiar în ipoteza epifenomenului, ştie că nu este un şir de reacţii fizico-chi- mice, se cunoaşte pe ea însăşi ca fiind un şir: acesta este paradoxul lui Stuart Mill).

Să mai menţionăm şi alte cugetări în legătură cu domeniul roboţilor gânditori: într-o problemă logică delicată am putea consulta trei maşini diferite şi am putea adopta, în caz de deosebire de păreri, pe cea a majorităţii. O maşină savantă (şi citătm încă o dată din Hibbert Journal) ar putea citi un sonet şi şi-ar putea spune părerea despre ritmul şi rimele acestuia, ar putea probabil chiar să scrie un „sonet combinatoriu" corect din aceste două puncte de vedere (dacă am introduce în ea cuvinte potrivite), ar putea, la rigoare, să scrie o proză corectă din punct de vedere sintactic, mai degrabă în genul *Finnegaris Wake**[58]*? decât în cel al „Memoriilor de dincolo de mormânt". Compunerea literară prin combinări întâmplătoare de cuvinte este înrudită cu „Minunea maimuţelor dactilografe", închipuită de Emile Borel: 10.000 de maimuţe, bătând la tot atâtea maşini de scris, un număr x de ani, ar compune textele tuturor cărţilor din Biblioteca Naţională.

Este nostim să descoperim că Cicero (în *De Natura Deorum*) a fost precursorul lui Emile Borel, născocind o „minune a maimuţelor dactilografe" în stil antic. El îl face într-adevăr pe stoicul Balbus să rostească următoarele cuvinte:

„Cel care este încredinţat că ordinea se poate ivi din haos la întâmplare poate tot aşa de bine să creadă că dacă o cantitate foarte mare compusă din cele 21 de litere, făcute din aur sau din orice altă materie, ar fi aruncate pe jos, atunci ele ar cădea în aşa fel încât ar alcătui Analele lui Ennius".

Întorcându-ne la maimuţele dactilografe, vedem că numărul x nu este infinit, ci se află undeva în regiunea „gogolcomplex".

Este de prisos să mai subliniem în ce măsură maşinile savante (sau „creierele electronice") pot fi folositoare în matematică şi în logica simbolică; ele sunt folosite în cercetări foarte complicate de către departamentele civile, militare sau navale ale marilor puteri. în afară de descrierea lor tehnică, consideraţiile psihologice şi filosofice care pot fi trase din felul cum funcţionează sugerează idei noi, oferă

argumente şi teme stimulatoare atât vitaliştilor, cât şi adversarilor lor; să mai vedem câteva comentarii ingenioase în legătură cu ele:

Un sonet scris de o maşină savantă (hotărât lucru, ideea sonetului pluteşte în aer) s-ar bucura de apreciere mai degrabă din partea altei maşini decât din partea unui om. Ar putea oare o astfel de maşină, în loc să combine nişte fraze, să producă toate combinările posibile ale unui anumit tip de diagrame stabilite pe o anumită temă, Secţiunea de Aur de pildă, oferind pictorului sau arhitectului un sortiment interesant de modele?

Declaraţiile „etice" ale unei maşini nu ar fi decât consecinţele logice ale principiilor etice ce i-au fost oferite (de pildă, câteva aforisme de Confucius sau de Marc Aureliu).

Deosebirea dintre operaţiile creierului şi cele ale maşinii: facultatea de a judeca (de a se folosi de judecata pentru care logica este un instrument) este principalul organ al inteligenţei, un organ cum este mâna, ochiul, stomacul, organe *folositoare* vieţii. Creierul este sediul fizic al acestui organ, centrala telefonică (comparaţie clasică folosită deja)[59]. însă situaţia este percepută de un alt element, cel psihic, care hotărăşte dacă este cazul să acţioneze sau să reflecteze, propune deciziile ce trebuie luate. Chiar şi în centrala telefonică există un factor exterior, abonatul, care cere numărul, el fiind cel care animă, produce fenomenul, şi nu domnişoara sau cadranul automat.

Mai este şi „presiunea vitală" care te îmboldeşte să judeci, să alegi, care face parte din forţa biologică; cu toate că are şi sedii fizice sau mai degrabă fiziologice, ea posedă şi o sursă psihică, extraspaţială poate, asemănătoare cu aceea a câmpurilor vii organizatoare ale lui Raymond Ruyer („Elemente de psiho-biologie"), câmpurile electromagnetice ale corpului omenesc fiind reflectări consonante ale acestora în maşina logică impulsul care corespunde forţei biologice este dat, în general, de o sursă sau de un circuit electric sau electronic, ca şi în circuitul nervos uman de altfel, în care toate acţiunile şi reacţiile nervilor au drept instrumente şi canale (nu cauze) mici circuite electrolitice. Însă maşina nu are prin ea însăşi dorinţa de a acţiona, de a judeca, de a alege în interesul său sau din curiozitate; îi trebuie un agent exterior, „programatorul", care alege probleme şi comandă, în general, tipul operaţiilor.

Dintre maşinile care funcţionează deja, mai pomenim „Calculatorul IBM" electronic, care „citeşte" instrucţiunile comunicate prin numere[60] sau prin benzi perforate, are o memorie „internă", care înmagazinează ordinea operaţiilor şi pune deoparte rezultatele, pentru a le folosi la momentul cerut, la problemele ce se pun în timpul dezvoltării matematice sau logice; maşina aceasta poate dispune de 400.000 de elemente de referinţă sau de calcul şi imprimă în final

rezultatele cu aproximaţia cerută.

Însă facultatea de a combina cifre, cuvinte sau simboluri nu a făcut să se nască şi facultatea de a gândi independent de mecanica silogistică. Căci într-adevăr nu cuvintele sau simbolurile, sau asocierea lor produc gândirea (teoria asociaţionistă), ci gândirea a produs cuvintele, simbolurile şi limbajul „urmând elanul, dorinţa naturii de a se recunoaşte şi de a se desăvârşi în om, suprema ei creaţie" (Teoria lui Wilson). Totuşi, simbolul sau cuvântul pot deveni ulterior creatori datorită facultăţii de a pătrunde în inconştient, în domeniul viselor şi al miturilor, al „metaforelor intime" şi de a scoate brusc la iveală analogii ascunse. Numai că aceste lucruri nu se aplică la maşini, lipsite încă de subconştient sau de inconştient; aceasta este una dintre deosebirile fundamentale între maşină şi om.

Avioanele care se îndreaptă în mod automat către ţintă, atrase de reflexia undelor electromagnetice (radar) sau de temperatura ţintei, minele acustice, atrase de ultrasunetele reflectate (sonar), toate acestea intră în domeniul automatelor cu judecată aparentă. Am putut vedea la Expoziţia de la Londra, din 1951, cele două „broaşte ţestoase electronice", *Elmer* şi *Elsie*, care, datorită „ochilor" cu celule fotoelectrice, „văd" obstacolele, sunt respinse de lumină, atrase de căldură, se mişcă într-un spaţiu restrâns fără să se lovească sau să se izbească de ziduri, ca nişte animale cu deplină raţiune. După teoria *Gestalt* materialistă (există şi o teorie *Gestalt*organicistă de disciplină mai degrabă spiritualistă, precum „holismul" mareşalului Smuts) nu există nici un motiv ca o maşină de acest gen să nu dezvolte o „conştiinţă epifenomen", să nu ştie că este maşină sau ca *Elmer* şi *Elsie*, broaştele ţestoase electronice, să nu fie afectate deodată de un complex sexual şi să acţioneze în consecinţă. Să mai aşteptăm.

Precursorii roboţilor de astăzi sunt automatele care au fost construite în număr mare după ce a fost inventat sistemul roţilor dinţate şi al regulatorului de bătăi, numit mecanism de ceasornic, dar abia în secolul al XVIII-lea automatele ajung la celebritate o dată cu Vaucanson: păpuşi mari care dansează, cântă la pian, bat toba, vorbesc, scriu scrisori etc. Un automat care joacă şah îi este înfăţişat ţarinei Ecaterina cea Mare, însă în realitate are ascuns în el un pitic care mişcă piesele pe tablă.

Hoffmann şi-o închipuie pe Olympia, încântătoarea femeie păpuşă de care se îndrăgosteşte unul dintre eroii săi; ea dansează şi cântă înaintea lui până când, după o ceartă între falsul tată şi mecanicul care a construit minunea, este scoasă o piesă esenţială, arcul motor se strică şi Olympia se prăbuşeşte fără viaţă, păpuşă fără doar şi poate, la picioarele adoratorului deznădăjduit. Cu povestea Olympiei, autorul a făcut din automatul uman, sau mai curând feminin, mai mult decât un tip, un arhetip care se întâlneşte peste secole cu mitul Galateei.

Ştiinţa şi mecanica modernă au înzestrat, după cum era şi firesc, automatele de acest fel cu facultăţi noi; ele pot nu numai să fie dirijate prin unde hertziene sau să se mişte singure precum *Elmer* şi *Elsie*, ci şi să se conformeze undelor sonore, răspunzând cu voce sintetic.

În legătură cu aceasta să menţionăm un nou tip de dictafon, care permite să dictezi un text unei maşini care îl „bate“ direct pe o foaie; textul este, fireşte, scris fonetic putând fi, de altfel, dictat în orice limbă.

Şi totuşi, problema: „Oare pot gândi maşinile?” îi frământă tot mai mult pe „cibemeticieni” şi pe matematicienii anglo-saxoni, inginerii arătându-se oarecum optimişti, matematicienii şi filosofii fiind de-a dreptul sceptici. Astfel, Turing a publicat (în revista *Mind*, octombrie 1950) un articol intitulat „Computing Machines and intteligence”, iar W. Ways îi răspunde în revista Philosophy din aprilie 1952. Turing descrie o „maşină-copil”, pe care îşi propune să o „educe” şi care va şti:

1° Să gândească, să scrie, să joace jocuri ad-hoc şi să-şi aducă aminte.

2° Să ia decizii, potrivite sau nepotrivite.

3° Să se observe pe ea însăşi.

4° Să se comporte într-un anume fel pentru a-şi atinge ţelul.

5° Să înveţe prin recompense şi pedepse.

6° Să se supună ordinelor.

7°Să facă dinadins greşeli în timp ce lucrează.

Pentru a verifica întrebarea „Oare pot gândi maşinile?”, Turing nu ia drept model gândirea umană, ci un exerciţiu, un „test” adaptat maşinii, a variantă a programului de radio „Douăzeci de întrebări”, rolul celui care pune întrebările fiind luat de o fiinţă omenească. Turing însuşi crede că o maşină în stare să susţină acest „test” nu există încă, dar că peste 50 de ani această problemă va fi rezolvată. El înlocuieşte, aşadar, întrebarea: „Oare pot gândi maşinile?” cu întrebarea: „Ne putem oare închipui o «maşină de calculat» electronică în stare să-şi joace onorabil rolul în testul de mai sus?"

Turing răspunde afirmativ; dimpotrivă Ways, luând ca punct de plecare definiţia unei maşini dată de dicţionar, declară că o maşină este o îmbinare de părţi mecanice sau electronice care nu are viaţă intimă psihologică, care nu este înclinată spre visare, care, la urma urmei, nu are nici conştiinţa de a avea conştiinţă, nici inteligenţă, nici voinţă independentă. Dacă o maşină ar zice: „Mă dor măselele”, sau „îmi plac căpşunele cu frişcă”, sau „îl urăsc pe domnul X”, noi am bănui că a fost inserat în ea un disc înregistrat. Refuzăm să îi atribuim maşinii vreun sentiment. (Dar oare nu putem dresa o maşină să spună cu sinceritate: „Lucrul acesta este plăcut, acestea este neplăcut”? Am pomenit cazul maşinii care se strică din cauza unei întrebări

necuviincioase, al cărui echilibru armonios este rupt.)

Ways citează şi conferinţa doctorului Jefferson (1949): „Vom putea spune că maşina are valoarea unui creier numai atunci când o maşină va putea să compună un sonet sau un concert pricinuit de gândurile şi emoţiile simţite, iar nu prin combinarea întâmplătoare de simboluri”.

Toate aceste argumente ridicate împotriva lui Turing se mărginesc, de fapt, la a face deosebirea între domeniul sentimentului şi cel al calculului logic; se admite că o maşină poate într-adevăr rezolva probleme de logică pură, nu atât din voinţă sau curiozitate internă de altfel, întrucât maşina nu poate decât să înşiruie tautologii (aceasta fiind, de fapt, metoda silogistică), însă are nevoie de inteligenţa unui „programator” din afară pentru a pune problema şi a interpreta rezultatul.

Întregul domeniu al inteligenţei şi al sentimentului îi scapă maşinii care nu poate, zice Ways, să fie serviabilă sau prietenoasă, să ia vreo iniţiativă, să aibă simţul umorului, să imite prin mimetism conştient, să fie îndrăgostită, „să-i placă fragii cu frişcă”.

Polemica aceasta nu este de prisos; nu ştim, o admite şi Ways, care va fi „inteligenţa” maşinilor logice peste 50 de ani, până atunci, observaţiile şi analizele acestea ne îngăduie să lămurim probleme reale de psihologie, chiar de fiziologie şi de logică simbolică şi obişnuită, care fac parte deseori din domeniul mai general al validităţii dogmelor pozitivismului empiric.

Dintre ipotezele nematerialiste despre originea vieţii pe planeta noastră, panspermia lui Arrhenius, transpunând misterul iniţial în spaţiile siderale, presupune că de aici au ajuns cândva până la noi germeni vii, nespus de mici şi nespus de rezistenţi, care s-au încarnat în cele dintâi protozoare, strămoşi ai tuturor speciilor vii; ne-am putea tot astfel închipui că în urma venirii unor noi germeni vii, unii dintre ei ar putea întâlni o maşină electronică, nouă şi sinistră Galatee, şi i-ar transmite scânteia vieţii.

CAPITOLUL XV

DE LA NUMĂR LA ABSTRACŢIA PURĂ-TEORIA GRUPURILOR ŞI A INVARIANŢILOR - RELATIVITATE ŞI

MECANICĂ CUANTICĂ ONDULATORIE - PRINCIPIUL MINIMEI ACŢIUNI

„Gândirea, luată în înţelesul său cel mai general, ca să poată cuprinde arta, filosofia, religia, ştiinţa, luate şi ele în accepţia cea mai generală, înseamnă căutarea invarianţei într-o lume în necurmată schimbare."
(C.J. KEYSER)

Am pomenit de mai multe ori disciplina misterioasă care domină la ora actuală aproape toată matematica şi pe care Oswald Spengler a numit-o: „concepţia ultimă şi finală a matematicii occidentale, amplificarea şi spiritualizarea teoriei funcţiilor în teorie a grupurilor". Această teorie ridică teoria mulţimilor la un grad de abstracţie superior; este o disciplină logică şi matematică totodată care studiază şi compară cicluri, grupuri de operaţii, de transformări luate în considerare independent de obiectele sau de mulţimile concrete sau fictive cărora li s-ar putea aplica.

După cum scria Henri Poincare: „Teoria grupurilor înseamnă, ca să zicem aşa, toată matematica, despuiată de materie şi redusă la forma ei pură". Aproape tot cu aceşti termeni descria neopitagoricianul Nicomachos din Gerasa lumea reală necorporală a structurilor şi a formelor ca fiind opuse lumii iluzorii a materiei.

Cea dintâi aplicare senzaţională a teoriei a fost aceea în care doi tineri savanţi de geniu au încercat să găsească rădăcinile unei ecuaţii de un grad mai mare de 4 cu ajutorul substituţiilor, operaţii care constau în a trece de la o permutare între n litere la o alta; substituţiile şi permutările între rădăcinile posibile ale unei ecuaţii de gradul 5 li-au îngăduit lui Abel şi lui Galois să dovedească, aproape în acelaşi timp, că această ecuaţie nu se poate rezolva prin radicali algebrici. Ştim că Galois a fost ucis în duel la vârsta de 21 de ani; îşi petrecuse noaptea redactând memoriul despre descoperirea sa.

Dacă o substituţie S permite trecerea de la o permutare P_1 la o permutare P_2, iar o altă substituţie T permite trecerea de la permutarea P_2 la permutarea P_3, numim *produsul* dintre S şi T substituţia care permite trecerea directă de la la P_1 la P_2. Toate substituţiile, în cazul rădăcinilor unei ecuaţii, fac parte dintr-un acelaşi *grup*. Dacă, în loc să raţionăm despre substituţii de litere,

operăm deplasări de figuri, descoperim o relaţie asemănătoare între transformările lui F_1 în F_2, apoi ale lui F_2 în F_3, transformarea directă F_1F_3 făcând, de asemenea, parte dintr-un grup care cuprinde atât pe F_1 F_2 cât şi pe F_2F_3; grupurile de permutări şi grupurile de transformări pot avea aceeaşi structură.

Importanţa memoriului lui Galois nu a fost înţeleasă decât 14 ani după moartea sa (1846), importanţă capitală nu numai în domeniul rezolvării ecuaţiilor, ci şi în cuprinzătoarea lume a matematicilor superioare. Galois întrevăzuse că una dintre proprietăţile cele mai însemnate ale noţiunii de grup este izomorfismul, identitatea de structură a transformărilor aplicate în domenii diferite, de exemplu între substituţiile rădăcinilor unei ecuaţii de gradul 5 şi cele 60 de rotaţii superpozabile ale unui icosaedru în jurul axei sale.

Noţiunea de grup se bazează în mare parte pe noţiunile de substituţii, permutări, transformări şi corespondenţe de structuri. Aici se inserează teorema lui W. van Wyck (1856-1894):

Fiecare grup de ordin finit n poate fi reprezentat ca un grup de substituţii de n litere. Avem, de exemplu, pentru trei litere a, b, c grupul:

abc acb bea bac cab cba.

Pentru a trece de la abc la acb înlocuim pe b cu c şi pe c cu b, ceea ce se scrie (bc).

(abc) se citeşte a în b, b în c, c în a. Substituţia (abc) aplicată aranjamentului abc dă un nou aranjament bca, care, aplicat la cab dă abc.

Dacă I este substituţia identică,

abc	acb	bea	bac	cab	cba
I	(bc)	(abc)	(ab)	(acb)	(ac)

substituirea din rândul al doilea transformă expresia din primul rând în abc. Cele şase substituţii alcătuiesc un grup.

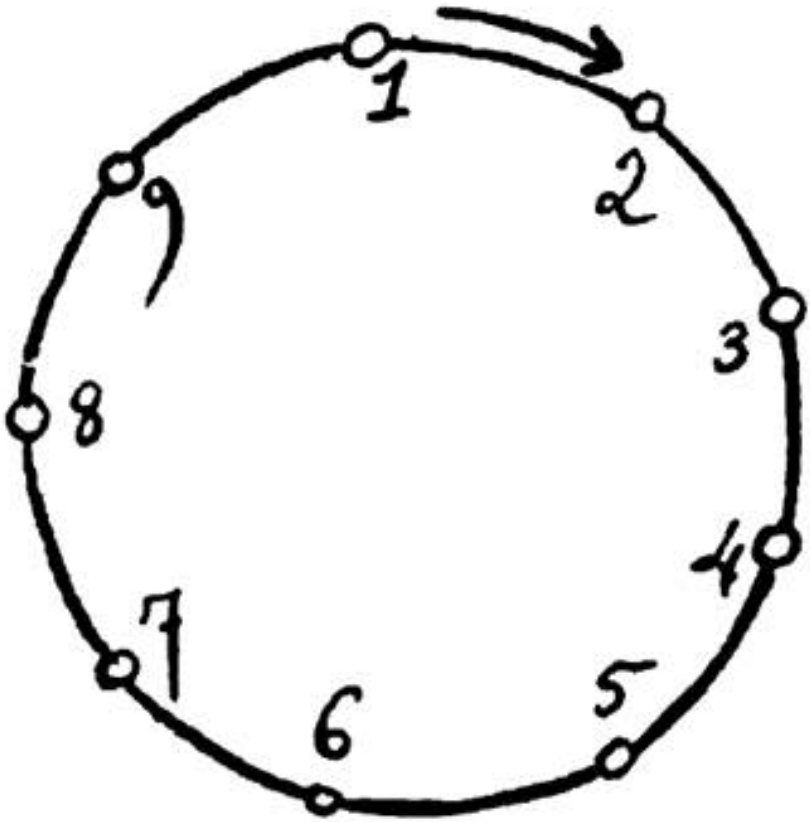
Un grup de substituţii echivalează cu un grup de permutări, de n! aranjamente posibile de n litere.

Noţiunea de invariant se înrudeşte aproape automat cu aceea de transformare: ceea ce rămâne invariant, număr, formulă, structură, într-un sistem de transformări sau de operaţii din interiorul unui grup. Simbolismul teoriei grupurilor este simplu şi logic. Operaţia sau transformarea T care, după ce o primă operaţie S a înlocuit pe A_1 cu A_2, produce din nou obiectul sau mulţimea iniţială A_1, va fi simbolizată prin S^{-1}. în acest caz, „produsul” T S devine S^{-1} S = 1. Transformare *identică*.

O mulţime de transformări aparţine unui grup dacă inversul oricărei operaţii asupra mulţimii aparţine mulţimii şi dacă se întâmplă acelaşi lucru cu produsul dintre două operaţii oarecare ale mulţimii, mulţimea translaţiilor în geometria euclidiană de pildă, sau mulţimea

rotaţiilor în jurul unui punct (aceste operaţii lasă invanriantă distanţa dintre două puncte).

În algebră, mulţimea transformărilor aplicate numerelor întregi, pozitive, nule sau negative, care constau în a adăuga fiecărui număr întreg x un acelaşi număr întreg a formează un grup.



A face trei salturi pe cadranul figurii de mai sus este reprezentat de P_3. Avem tot timpul $P_m\ P_n = P_1$ (numărul obţinut este totdeauna pe cadran), iar mulţimea acestor operaţii constituie un grup. Este, de altfel, izomorf cu grupul salturilor electronilor pe orbite în interiorul atomului.

Cele n! permutări ale unui număr n de obiecte constituie un grup. Dimpotrivă, la mişcările calului pe tabla de şah avem întotdeauna $P_m\ P_n = / = P_1$ (diferit de orice transformare directă), cu excepţia cazului în care m, n, 1 nu sunt egale cu 0.

Prin această tehnică descoperim structura unui corp de operaţii, modul în care se înlănţuie operaţiile, revelaţia izomorfismelor şi a invarianţilor.

Dacă luăm o mulţime de p elemente, toate diferite, atunci

diferitele moduri de a umple b cutii, punând câte un element în fiecare cutie vor fi: p (p-1) (p-2) (p-3)... (p-b +1).

Teoria transformărilor care lasă invariante figurile plane sau solide (în mod deosebit distanţa dintre două puncte oarecare) ne furnizează întreaga geometrie euclidiană; alte grupuri de transformări, după cum a arătat H. Poincare, pot şi ele să producă geometriile proiectivă, analagmatică, afină, *analysis situs* sau topologie şi se aplică, de asemenea, geometriilor cu un număr oarecare de dimensiuni[61]. De asemenea, după cum a arătat Einstein, prin examinarea grupului de transformări care într-o mulţime de patru dimensiuni satisface principiul acţiunii staţionare, lăsând invariantă o anumită funcţie - forma cvadratică fundamentală, generalizare a distanţei - teoria grupurilor îngăduie să se găsească legile gravitaţiei, având drept cazuri particulare mecanica şi dinamica clasice. Şi, în acest urcuş către abstracţie, graniţele deja estompate dintre matematica pură, fizică, logică şi teoria cunoaşterii se şterg treptat până dispar. Noţiunea de invarianţă pluteşte acolo sus, strâns legată în mod paradoxal de noţiunea opusă de relativitate; după fiecare etapă noţiunea relativului ne împinge tot mereu la cucerirea Absolutului. Chiar noţiunea de invariant decurge firesc din aceea de structură identică sau permanentă, pusă deja în evidenţă de Nicomachos din Gerasa; este, totodată, o prelungire în spaţiu şi timp a principiului identităţii; am văzut că în geometrie grupul este deseori definit printr-o proprietate de invarianţă.

Cu toate că noţiunile introduse de teoria grupurilor par simple, simplitatea aceasta este mai degrabă înşelătoare, iar teoria acoperă un câmp atât de vast, încât un savant şi-ar putea petrece viaţa explorând doar unul dintre numeroasele ei domenii. Avem într-adevăr grupurile discontinui, finite sau infinite, grupurile continui, de asemenea finite sau infinite, grupul lui Lie (Sophus Lie, unul dintre pionierii teoriei grupurilor), grupuri cu reprezentare lineară, grupuri abeliene, nonabeliene etc.

Câteva aplicaţii ale teoriei grupurilor la mecanica cuantică:

Orice schimb între doi electroni, orice permutare de electroni lasă o configuraţie infraatomică invariantă. Sau:

Configuraţiile posibile ale electronilor în jurul nucleului sunt invariante pentru toate permutările de electroni (acest lucru este important şi pentru teoria spectrelor).

Calculul tensorial, instrumentul care i-a permis lui Einstein să pună în ecuaţii relativitatea generală, este şi el un produs al teoriei invarianţei şi al teoriei grupurilor. Un tensor reprezintă o relaţie fizică independentă de alegerea coordonatelor. H. Rougier, de pildă, a aplicat teoria grupurilor, folosindu-se doar de conceptul de tensor, la noţiunea de simetrie abstractă introdusă de Curie, iar Einstein,

datorită tensorilor, a putut să reprezinte legile naturii astfel încât să le facă independente de orice sistem de axe de referinţă. Pentru a-şi construi ecuaţia fundamentală, el s-a folosit de cea mai generală lege dintre „legile naturii", aceea care guvernează evoluţia oricărui sistem fizico-chimic închis, chiar şi a universului (la scară cosmică putem face abstracţie de noţiunea vieţii), principiul minimei acţiuni. Nu trebuie să-mi cer iertare pentru faptul că prezint aici acest principiu care, deşi se exprimă prin simboluri mai degrabă algebrice decât numerice (iar în cazul relativităţii generale prin simboluri tensoriale), este manifestarea cea mai imperioasă a Legii Numărului, lege întrevăzută de Pythagoras. Este interesant să notăm că Leonardo da Vinci a fost cel dintâi care a formulat acest principiu (legându-1 de principiul cauzalităţii) în următoarea frază din „Caietele" sale:

„Natura nu-şi încalcă niciodată propria lege ... O ! necesitate inexorabilă! Tu sileşti toate efectele să fie rezultatele nemijlocite ale cauzei lor, iar printr-o lege supremă şi irevocabilă fiecare acţiune naturală ţi se supune prin cea mai scurtă evoluţie".

Enunţul obişnuit al principiului acţiunii spune simplu că atunci când un sistem închis (asupra căruia nu acţionează nici o forţă exterioară) trece de la o stare la alta, această schimbare are loc cu cea mai mare economie de efort cu putinţă (efortul adevărat, cel care sporeşte energia potenţială) fără să se teamă însă să risipească lucrul mecanic potenţial deja acumulat, producerea de energie degradată sau entropie (vedem de pe acum că principiul minimei acţiuni, este în realitate o formă a principiului lui Camot, fapt care este numit uneori principiul efortului minim şi este chiar confundat cu principiul *hedonistic*).

Pentru a enunţa corect principiul trebuie, de altfel, să introducem *acţiunea*.

Acţiunea unui sistem într-un interval $t_1 - t_0$este dublul, produs în intervalul de timp, al valorii medii a energiei cinetice în timpul intervalului.

Dacă E_a este forţa vie sau energia cinetică, actuală, a sistemului, acţiunea va fi:

$$A = 2\int_{t_0}^{t_1} E_a\, dt \quad \text{cu} \quad E_a = \frac{1}{2}\sum mv^2$$

Acţiunea are dimensiunile unei energii înmulţite cu un timp, ML^2T^{-1} (vom vedea că acestea sunt dimensiunile cuantei lui Planck, care este şi ea o „cuantă de acţiune").

Să formulăm acum enunţul clasic al principiului nostru:

„Dacă suma energiilor potenţiale şi cinetice dintr-un sistem este constantă în toate configuraţiile sistemului (sistem „închis"), dintre

toate traiectoriile posibile pe care le pot urma elementele sale pentru a trece fără frecare de la o configuraţie la alta, traiectoriile efectiv adoptate vor fi cele pentru care acţiunea este minimă".

Un alt enunţ este mai simplu:

„Atunci când energia totală a unui sistem (energia potenţială plus energia cinetică) este constantă, suma produselor maselor, vitezelor şi spaţiilor parcurse este minimă".

Altfel spus: Acţiunea $A = \sum m \int v ds$ este un minimum, iar derivata acestei cantităţi va fi prin urmare nulă.

$$\frac{d}{ds} A = 0 \quad sau \quad \frac{d}{ds} \sum m \int v \times ds = 0$$

Aceasta rezultă din definirea acţiunii fie ca dublul integralei în timp a energiei cinetice $\int_{t_0}^{t_1} \sum m \times v^2$, fie ca integrala în spaţiu (pentru fiecare particulă) a impulsului său $m \int_{s_0}^{s_1} v \, ds$.

Dacă numim potenţial cinetic diferenţa dintre energia potenţială şi energia cinetică sau actuală a unui sistem ($E_k = E_p - E_a$), t_0 şi t_1 timpii la începutul şi la sfârşitul transformării, avem:

A(acţiunea) = $2 \int_{t_0}^{t_1} E_k dt$,

iar principiul minimei acţiuni (numit sub această formă principiul lui Hamilton) devine

$$\delta_A = \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k dt = 0$$

(este enunţat uneori spunându-se că *valoarea medie a potenţialului cinetic* între t_0 şi t_1 trebuie să fie un minimum, prin urmare derivata sa este nulă).

Întrucât suma Ea + Ep este din ipoteză constantă (este vorba de un sistem închis), potenţialul cinetic E_p-E_a şi energia cinetică nu diferă decât prin această constantă.

După Leonardo, principiul minimei acţiuni a mai fost enunţat de către Fermat într-un caz particular, referitor la drumul cel mai scurt pentru traiectoria unei raze de lumină, apoi de Leibniz (în 1682) ca

„unul dintre principiile arhitectonice folosite de Inteligenţa Divină” şi, în sfârşit, Maupertuis, în secolul al XVIII-lea, îl enunţă corect drept legea cea mai generală care operează în Univers. în legătură cu entuziasmul arătat atunci de Maupertuis, Voltaire l-a ponegrit pe nedrept şi s-a certat cu Frederic al II-lea, care îl numise pe Maupertuis preşedinte al Academiei din Berlin. Dar, după cum s-a putut vedea în secolul al XlX-lea, principiul mai are şi multe alte forme în afară de forma mecanică clasică, de pildă cea de-a doua lege a termodinamicii (Legea lui Carnot-Clausius), ca principiu al creşterii entropiei (energie degradată cu consecinţa ei „nivelarea entropică”).

Principiul lui Carnot (enunţat de Clausius) afirmă că este cu neputinţă ca o maşină autonomă, asupra căreia nu acţionează nici o forţă exterioară, să realizeze trecerea căldurii de la un corp la alt corp care are o temperatură mai ridicată decât a lui; sau: căldura nu poate circula singură, adică fără compensare de la un corp mai rece la unul mai cald.

Enunţul lordului Kelvin sună asfel:

„Este cu neputinţă să obţii, cu ajutorul unui sistem material neînsufleţit, un efect mecanic de la o parte de materie prin răcirea acesteia sub temperatura celui mai rece dintre obiectele din jur".

Kelvin pare a fi cel dintâi care a remarcat proprietatea principiului minimei acţiuni de a oferi un criteriu care să deosebească materia organizată de sistemele anorganice. Unii atribuie totuşi această descoperire lui Helmholtz; însemnătatea ei este recunoscută abia în zilele noastre. Am aflat de la Gustave Le Bon că H. Poincare observase că materia vie nu se supune întotdeauna acestei legi care conduce toate sistemele neînsufleţite.

Un alt enunţ, pur termodinamic, al principiului lui Camot spune: „Orice maşină termică ce produce lucru mecanic datorită căldurii care i se furnizează, nu poate transforma în lucru mecanic decât o parte din această căldură: proporţia depinde de excesul de temperatură la care este furnizată căldura faţă de temperatura reziduului eliminat de căldura neconvertită în lucru mecanic.”

Căldura produce lucru mecanic „căzând” de la un nivel mai ridicat la un nivel mai scăzut de temperatură (asemenea căderilor de potenţial sau, în hidraulică, diferenţelor de nivel); trebuie să avem un „corp rece” la nivelul de jos.

Principiul nostru are forme mai accesibile, mai uşor de perceput şi de formulat. De pildă, în mecanica raţională, principiul lui Dirichlet: pentru ca echilibrul unui sistem închis să fie stabilit trebuie ca energia lui potenţială să treacă printr-un minimum (care corespunde, de obicei, poziţiei celei mai de jos a centrului de gravitate).

Principiul Thomson-Berthelot: când avem mai multe corpuri şi sunt posibile multiple reacţii chimice, va avea loc în mod obişnuit

acea reacţie care corespunde celei mai mari căderi de „grad” energetic, celei mai mari cantităţi de căldură emise (exotermie; nu se produce lucru mecanic rezistent, ci, ca mai înainte, se cheltuieşte gratuit, se face „risipă”).

Principiul lui Curie: „Pentru ca un fenomen să se poată produce într-un mediu oarecare, este necesar ca anumite elemente de simetrie să nu existe în acest mediu. Asimetria este cauza fenomenului”; într-un mediu complet izotrop şi omogen, nu există nici o „raţiune suficientă” pentru a se produce o schimbare.

Legea lui Boltzmann: Universul trece în mod constant de la stările cele mai puţin probabile la stările cele mai probabile.

Este o variantă a principiului minimei acţiuni intitulată „Principiul lui Hamilton”, reformulată de către Einstein, Weyl, Eddington, ca „principiul acţiunii staţionare” pe care Einstein a introdus-o în teoria relativităţii sub următoarele forme[62]:

1° Mişcarea unui punct material liber din Univers este determinată de „legea acţiunii staţionare” $\delta \int d_s = 0$, în care elementul d_s de pe o linie de univers este definit în fiecare punct de observatori în „cădere liberă”, situaţi în „lumea euclidiană” tangentă în acest punct. Linia de univers a acestui punct material va fi prin urmare o geodezică trasată în multiplicitatea cu 4 dimensiuni ce alcătuieşte mulţimea evenimentelor în univers. Geodezica între 2 puncte, dată de acel interval $\int d_s$ pentru care $\delta \int d_s = 0$, corespunde în spaţiul cu 4 sau cu n dimensiuni liniei drepte în plan, cercului pe sferă. Câmpul de gravitaţie a devenit doar o manifestare fizică a curburii spaţiului. Putem spune că în spaţiul nostru traiectoria unei mase (un corp sau un punct având o masă oarecare) se deplasează de la o regiune cu o curbură mică către o regiune cu o curbură accentuată.

2° Forma mai generală. Toate legile mecanicii pot fi reunite într-un principiu general al acţiunii staţionare $\delta_A = 0$.

Acest lucru pare limpede, dar se complică puţin pe măsură ce încercăm să dăm la iveală simbolurile aride ale calculului tensorial.

Acţiunea este A = $\int G \times \sqrt{-g} \times d_v$ în care d_v, diferenţiala coordonatei generalizate, reprezintă elementul de hipervolum, de „capacitate" cu 4 dimensiuni, $dx_1 j . dx_2 . dx_3 . dx_4$ (integrala este o integrală cvadruplă); g este determinantul complet g_{11}-, g_{44} , G este invariantul care reprezintă curbura

generalizată a lui Gaus[63]. G $\times \sqrt{-g}$ în spaţiul cu 4 dimensiuni corespunde unei densităţi. În spaţiul cu 3 dimensiuni, densitatea înmulţită cu volumul dădea masa; în spaţiul cu 4 dimensiuni densitatea înmulţită cu „capacitatea" dă acţiunea. Deoarece $\sqrt{-g}$ este un invariant, acţiunea este proporţională cu G, curbura universului fizic. Notaţia principiului acţiunii staţionare în calculul tensorial este de o simplitate biblică, $G_{\mu\nu} = 0$; simplitate care se arată înşelătoare când o aprofundezi[64]. Ştim că Einstein şi-a generalizat Relativitatea Generală extinzând-o de la gravitaţie la câmpurile electromagnetice şi termodinamice, făcând din ea o „teorie unitară a câmpurilor", menţinând şi aici ideea că legile Naturii rămân invariante în orice sistem de referinţă.

Tot de acest principiu al acţiunii staţionare sau al minimei acţiuni s-a folosit Louis de Broglie pentru a întemeia mecanica ondulatorie.

Se pare, aşadar, că avem de-a face cu ceea ce am putea numi „Legea fundamentală a universului fizic", care dirijează evoluţia oricărui sistem anorganic închis, adevărata „Lege a Numărului" prevăzută de Pythagoras, deşi numărul nu apare aici decât acoperit de simboluri.

Cuvântul *anorganic* din fraza precedentă nu este lipsit de însemnătate; după cum presimţiseră Kelvin (poate că şi Helmholtz) şi Poincare, viaţa, organismele vii nu se supun principiului minimei acţiuni.

Există şi alte legi fizice importante reunite în formule care par nevinovate. Einstein a arătat că masa unui corp în mişcare, departe de a fi o caracteristică permanentă, creşte o dată cu viteza, iar dimensiunile (inclusiv timpul) dimpotrivă, se contractă în direcţia mişcării. Ele s-ar reduce la jumătate dacă viteza ar atinge 90% din viteza luminii, la 0 dacă viteza ar fi egală cu cea a luminii, masa devenind în acest caz infinită. Viteza luminii apare chiar şi în rigurosul enunţ al principiului mecanic al cauzalităţii.

Este posibil să se prevadă condiţiile fizice în oricare punct P din Univers, într-un moment t, dacă cunoaştem condiţiile fizice într-un moment precedent t_0 în orice punct din spaţiu a cărui distanţă până la P este mai mică decât c $(t-t_0)$.

La scară galactică sau chiar planetară , viaţa nu are o influenţă perceptibilă asupra acestor condiţii. Dimpotrivă, la scara globului terestru biosfera are influenţă şi strică ecuaţiile.

Dacă M este masa unui corp cu viteza v, m masa sa în stare de repaus, c viteza luminii (înjur de 300.000 km pe secundă) atunci

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dacă viteza unui corp material ar fi $\frac{1}{1} \times c$, masa lui s-ar mări cu $\frac{1}{7}, M = \frac{8}{7}m$

Dacă v ar fi 99% din c, masa ar deveni M = 7m[65].

Dar cea mai importantă ecuaţie formulată de Einstein când a arătat că masa şi energia sunt interschimbabile, se pot transforma una în alta, este teribila **E = mc²**, ecuaţia căreia i se spune „a bombei atomice" şi care spune că energia potenţială a unui corp cu masa m (în stare de repaus) este egală cu produsul dintre masa şi pătratul vitezei luminii (termenul c^2 dovedeşte uluitoarea cantitate de energie conţinută până şi într-un gram de materie). Acestă prezicere neverosimilă în aparenţă, triumf macabru al matematicii, cumplită ameninţare pentru viitor a fost, după cum ştim, parafată la Hiroshima[66].

Să aruncăm o privire timidă asupra tainelor mecanicii ondulatorii, devenită mecanica cuantică ondulatorie pentru a spicui câteva „legi ale numărului" din lumea infraatomică.

Şi aici *acţiunea* apare ca un factor deosebit de însemnat în transformările energetice ale sistemelor fizice electronice sau chiar numai luminoase.

Cuanta h a lui Planck este elementul discontinuu constant, modulul sau standardul care măsoară aceste transformări, fie singur, fie înmulţit cu un număr întreg şi care apare în orice oscilaţie cu emisii sau absorbţie de energie electronică. La fiecare emisie de energie avem:

$$\frac{E}{f} = h = 6{,}55$$ ergi pe secundă,

E - energia emisă

f - frecvenţa oscilaţiei (pe secundă)

h - constanta lui Planck.

Această constantă are dimensiunile unei acţiuni (ML^2T^{-1}). Energia produsă prin lovirea unui electron de un foton are, invariabil, valoarea unei cuante.

Pentru foton (undă luminoasă care se comportă uneori ca o particulă):

Cantitatea de mişcare $\times$ lungimea de undă = h

Energia $\times$ perioada de oscilaţie = h

c (viteza luminii) $\times$ perioada de oscilaţie = lungimea de undă = λ

Cantitatea de mişcare p = h $\times$ f^l

f^l frecvenţa de oscilaţie a luminii $f^l = \frac{c}{\lambda}; p = \frac{h}{\lambda}$

Ştim că, în conformitate cu principiul de incertitudine al lui Heisenberg, poziţia unui electron şi cantitatea sa de mişcare (sau viteza v) nu pot fi determinate în acelaşi timp; nu putem determina decât valoarea unui singur element dintre cele două.

Poziţia unui electron poate fi determinată, de exemplu, cu o aproximaţie de 0,001 mm şi, simultan, viteza sa cu o aproximaţie de 1km/s, sau 0,0001 mm şi 10 km/s, sau 0,00001 mm şi 100 km/s etc.

Putem prezice poziţia unei mase de 1 mg cu o aproximaţie de 1/5000 dintr-un milimetru; dar atunci când viteza unui electron este cunoscută, incertitudinea în legătură cu poziţia sa este de 10^{-8} cm, adică de acelaşi ordin cu dimensiunea totală a atomului.

Această ceaţă de incertitudine şi faptul că electronii şi fotonii (particule de lumină) se comportă în acelaşi timp, sau mai degrabă alternativ, ca nişte particule sau ca nişte unde, au făcut să se nască teoria „undelor asociate" acestor două tipuri de particule. Intrăm aici într-un domeniu cvasiabstract, în care spaţiul fizic al observatorului şi un alt spaţiu, psihic sau mental, se ating în mod misterios. Căci spaţiul străbătut de unde conform teoriei ondulatorii a luminii, spaţiul undelor asociate este un spaţiu „conceptual"; undele acestea sunt „unde de cunoaştere" şi reprezintă nişte probabilităţi, nu sunt electromagnetice, însă frecvenţele şi lungimile lor se pot calcula. De exemplu, undele luminoase emise de un atom au o frecvenţă caracteristică; este frecvenţa „pulsaţiilor" formate de două trenuri de unde asociate, unde abstracte, unde de probabilitate, dar ale căror pulsaţii sunt concrete, aparţin lumii fizice. Aceste unde sunt „undele Ψ" sau funcţia Ψ în legătură cu care un savant englez a scris:

„Acest misterios Ψ, identificat cu o probabilitate, se pare că a luat locul eterului, ca subiect al verbului «a ondula»".

Dacă M este masa unui „corporundal" (particulă şi undă asociată), E energia lui, şi dacă mişcarea lui liberă se efectuează de-a lungul axei

x, avem pentru „funcţia Ψ ” ecuaţia următoare

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 M}{h^2} \times E \times \Psi = 0,$$

h fiind constanta lui Planck.

(Ψ)^2 măsoară în acest caz probabilitatea de a găsi corpusculul între x şi x + dx.

Întrucât am pomenit eterul, renegat şi luat în râs de ştiinţa anului 1920, să notăm că ne putem aştepta oricând să vedem apărând un comunicat în genul „Eterul n-a murit”; Poul Dirac, unul dintre magicienii mecanicii cuantice ondulatorii, care a cheltuit multă inteligenţă pentru a stabili analogia simetrică a perechilor

$$\begin{cases} electroni \\ unde\ asociate \end{cases} ; \begin{cases} fotoni \\ unde\ luminoase \end{cases}$$

a scos, se pare, din ascunzătoare eterul lui Maxwell şi o să-l pună la mare cinste într-un costum uşor retuşat.

„Legile Naturii" (pe lângă principiul minimei acţiuni care este mai degrabă o hotărâre administrativă decât o lege în înţelesul cel mai înalt al cuvântului) sunt acum legile propagării acestor unde sau bancuri de ceaţă, ecuaţiile abstracte ale mecanicii cuantice ondulatorii; această ceaţă cvasimentală a devenit, de fapt, „substanţa” Universului[67].

Fizicienii englezi numesc fotonii, electronii, protonii: *corporundals*, corpuri-unde, pentru a arăta că au un dublu aspect. Fizica matematică de astăzi ne oferă prin urmare, în ultima analiză, o lume exterioară alcătuită din entităţi (*corporundals*) care nu au o existenţă permanentă, nici mai multă formă decât substanţă sau poziţie, şi.care nu se pot închipui, concepe, altfel decât prin formulele unei matematici hieratice.

Ca imagine abstractă sau simbol al acestor entităţi, sau mai degrabă al probabilităţilor care le înconjoară asemenea unui roi care vibrează, Heisenberg a introdus un tabel de numere cu două intrări care (ca să-l citäm pe Louis de Broglie) „pulverizează într-o oarecare măsură şirurile clasice ale lui Fourier într-o infinitate de elemente discrete, mulţimea lor reprezentând mărimea avută în vedere”. Tabelul acesta, imagine a funcţiei Ψ, dă o măsură a probabilităţii de a găsi electronul în anumite regiuni.

Să îndreptăm un proiector asupra lumii tulburi şi scânteietoare a

undelor asociate, lumea Ψ care a luat locul lumii de repaus a lui Laplace şi Lavoisier. Pătratul funcţiei Ψ a lui Heisenberg-Schrodinger, pentru o mulţime de particule, reprezintă probabilitatea de a găsi aceste particule în poziţii date, sau cu viteze sau energii date. Unda asociată electronilor are o lungime de undă de ordinul celei a razelor x (1/10.000.000 dintr-un mm) dar, o spun din nou, nu este electromagnetică. Vibraţiile subeterului ale cărui corpuscule cu unde asociate sunt vârtejuri par să aibă o frecvenţă de un milion de ori mai mare decât cea a luminii; lungimea lor de undă este dată de

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

m - masa corpusculului asociat undei

v - viteza corpusculului asociat undei.

Relaţiile dintre electron-undă-asociată şi foton-undă luminoasă depăşesc o vagă similitudine: se ştie astăzi că un foton se poate transforma în corpuscul, că o energie radiantă poate da naştere unei perechi de electroni de semn contrar, furnizând mai întâi contribuţia de energie $E = 2mc^2$, necesară apariţiei maselor, apoi energia cinetică, pe care electronii o vor putea avea la început.

Ecuaţia $E = hf$ se poate scrie şi $\frac{E}{f} = h = p\lambda$, în care p este cantitatea de mişcare mv; numai că aici perechea E, p se referă la o imagine ondulatorie.

Am văzut că h este egal cu 6,55 $\times$ 10^{-27} ergi-secundă.

Să mai adăugăm acestui noian de paradoxuri faptul că, deşi se admite că aceste unde nu sunt decât nişte reprezentări simbolice ale anumitor probabilităţi şi nu fenomene fizice în vechiul înţeles al cuvântului, ele pot fi *fotografiate*.

Dacă în formulele cuantice vom face ca valoarea lui h să tindă către 0, atunci vom regăsi formulele clasice precuantice. Să mai spunem că nu numai electronul şi fotonul, ci şi toate corpusculele pseudomateriei: pozitroni, protoni, neutroni, mezoni, cu sarcină sau neutri, neutrini, sunt asociaţi cu nişte „funcţii de undă“ de tipul Ψ.

Putem spune (şi Louis de Broglie a adus confirmarea) că principiul incertitudinii sau al nedeterminării implică principiul cauzalităţii şi determinismul fizico-chimic la scară infraatomică. O altă deformare aparentă a principiului cauzalităţii este aceea că dintr-o bucată dată de radiu este cu neputinţă, chiar în teorie, să prezici care dintre atomii de radiu se va dezintegra la un moment dat. Tot ce ştim este faptul că,

statistic, o proporţie exactă de atomi din bucată va fi transformată în radiaţii în cursul unui an, o parte egală cu $4{,}1 \times 10^{-4}$ (durata medie de „viaţă" a unui atom de radiu este de 2440 de ani).

Putem trece direct de la infinitul mic la infinitul mare observând una dintre cele mai frumoase jonglerii matematice executate vreodată, aceea prin care Eddington, folosind firesc teoria grupurilor, a calculat în câteva rânduri şi într-o jumătate de duzină de ecuaţii simple în aparenţă numărul N de electroni din univers (egal cu numărul de protoni). Dacă R_s este raza de curbură a spaţiului vid, m masa unui electron, e sarcina sa,

atunci avem $\frac{R_S}{\sqrt{N}} = \frac{e^2}{mc^2}$ (c reprezintă totdeauna viteza luminii)

sau: $\frac{hc}{2\pi e^2} \times m = \frac{\sqrt{N}}{R_S}$

$\frac{hc}{2\pi e^2}$ este 137, „constanta structurii fine".

R_s este considerat aici ca 500 megaparseci sau 1,54 x 10^{27} cm. Atunci N, numărul electronilor din univers, va fi 10^{79}.

Această şmecherie, coerentă de altfel, este pentru profan la fel de neobişnuită, la fel de surprinzătoare ca aceea a fachirului hindus numită *the Indian rope-trick* („şmecheria" cu frânghia: un fachir aruncă în sus o frânghie pe care se caţără un băiat care dispare, sub ochii halucinaţi ai spectatorilor).

Dar numărul N (puţin mai mic decât 2^{256} în care 256 = 2^8) şi valorile celorlalte constante cosmice găsite de Eddington în acest calcul abstract (cum sunt „constanta de structură fină" $\frac{hc}{2\pi e^2}$ = 137, constanta G a gravitatiei = 6,66 $\times$, 10^{-8} constanta cosmică $\lambda = \frac{3}{R_S^2}$) coincid cu valorile calculate prin alte procedee sau prin observaţii fizice directe.

Să punem alături de îndrăzneţul calcul al lui Eddington pe cel prin care Arhimede, în scrisoarea către regele Gelon, numită „Numărul firelor de nisip", calculează numărul „arenar" de fire de nisip din Univers; 10^{63}; rezultatele lui Eddington şi ale lui Arhimede sunt din acelaşi ordin de mărime. 2 x IO^{79}, numărul total, electroni plus

protoni, de particule din Univers după calculele lui Eddington, are 80 de cifre (9^{9^9} are 309693 cifre).

Hartmann face un calcul asemănător plecând de la teoria lui Cebâşev despre numerele prime:

$$Px_{=}\frac{ax}{\log_e x}$$

(P_x este numărul numerelor prime $\leq$ cu x, a = 0,964889) şi de la volumul Universului V (volumul „suprafeţei" hipersferei cu 4 dimensiuni), si găseste că N = $0{,}96489^{\frac{V}{\log_e V}}$. Întrucât după el $\log_e V$ este egal cu $(13{,}7)^2$, calculează că N = $96489^{\frac{V}{137^2}}$ (unde apare constanta de structură fină 137). în dezvoltarea acestor calcule apar şi alte coincidenţe demne de luat în seamă.

$$(13{,}7)^2 = \frac{1846{,}61 \times 980{,}665 \times 2{,}99796 \times 10^{10}}{6{,}06436 \times 10^{23} \times 4{,}79 \times 10^{-10}}$$

şi $\frac{137^2}{1846{,}61} = \frac{980{,}665 \times V}{N}$ cu $N = 1{,}5747 \times 10^{79}$ şi $2N = 136 \times 2^{256}$

Verificând aceste cifre constatăm că 1846,61 este apropiat de raportul $\frac{masă\ proton}{masă\ electron}$; 939,665 este acceleraţia gravitaţională g, 2,99746 $\times$ 10^{10} este viteza luminii; 6,06436 $\times$ 10^{23} este numărul lui Avogadro.

Hartmann crede că aceste coincidenţe nu pot fi efectul întâmplării şi deduce de aici că împărţirea materiei în Univers este identică cu aceea a numerelor prime, X este pentru P_x ceea ce este V pentru N.

Să lăsăm această orgie de cifre pentru a ne întoarce la principiul minimei acţiuni, „Lege a Numărului" prin excelenţă, şi la semnificaţiile sale metafizice, ca principii care guvernează evoluţia oricărui sistem *anorganic*. Îndată ce un sistem conţine Viaţă, materie vie, acest principiu nu se mai aplică cu rigurozitate, entropia sau energia degradată în loc să crească se poate micşora, pot fi create

rezerve de energie potenţială, de lucru mecanic rezistent.

În fotosinteza plantelor, de pildă, acestea pot crea rezerve de zahăr şi de amidon folosindu-se de energia la joasă tensiune, de căldură solară.

$$6C0_2 + H_2O = C_6H_{12}0_6 + 6\ O_2$$

(sau mai general $nC0_2 + mH_20$ + căldură solară = $C_n(H_20)m + n0_2$).

acid carbonic + apă = dextroză + oxigen.

Dextroza este transformată după aceea în amidon, $C_6H_{10}O_5$.

Putem spune prin urmare că viaţa încalcă în aparenţă neîncetat principiul minimei acţiuni şi acest fapt oferă vitalismului un criteriu, un „test" matematic despre transcendenţa vieţii. Puţini savanţi cunosc acest „test" sau îi apreciază importanţa.

Bergson îl întrevede neclar din punct de vedere termodinamic; el constată că organismele vii pot „opri", pot face să înceteze degradarea energiei, principiul lui Camot, dar nu îşi dă seama că ele pot şi răsturna, *încălca* legea. El scrie:

„Viaţa este cu putinţă pretutindeni unde energia coboară panta indicată de legea lui Carnot şi acolo unde o cauză, cu direcţie inversă, poate întârzia coborârea..."(*Evoluţia Creatoare*)

El invocă în acest fel un demon al lui Maxwell, arbitrar, în loc să perceapă că viaţa însăşi este cauza opririi, a întreruperii.

Dintre savanţii moderni din Franţa care au cugetat asupra însemnătăţii testului îl voi cita mai întâi pe R. Ruyer (*Elemente de psihobiologie*); el admite că viaţa se abate de la principiul minimei acţiuni, „de la principiul entropiei şi al amestecului nivelator" şi declară că „demonul lui Maxwell", care intervine, este un „domeniu unitar", în stare să „survoleze" din punct de vedere psihic şi să aleagă. „Forma adevărată este tematică şi *semnificantă*."[68]

Iar Leconte du Noüy:

„Istoria evoluţiei vieţii arată că are loc o creştere sistematică a asimetriilor structurale, în contradicţie cu cea de-a doua lege a termodinamicii. Şi nu pot fi puse deoparte ca nişte „fluctuaţii rare", întrucât au crescut o dată cu succesiunea epocilor biologice până când au atins punctul maxim cu creierul omenesc". Şi adaugă: „După toate probabilităţile, transformările evoluţiei biologice par, până la un anumit punct, că nu se supun legii fizice fundamentale a lui Carnot-Clausius (forma termodinamică a principiului minimei acţiuni)... aceasta este derivată într-o aceeaşi direcţie, direcţie interzisă materiei inerte şi care dă naştere la asimetrii tot mai mari, la stări tot mai „improbabile".

Iar H. Guilleminot (*Materia şi Viaţa*) spune:

„În timp ce încălcările şi opririle «improbabile» a celei de-a doua legi a termodinamicii au loc neîncetat în materia vie, Boltzmam a arătat că pentru ca această lege să fie zădărnicită într-un decilitru de gaz doar prin jocul întâmplării ar trebui să aşteptăm un număr de secole egal cu 1 urmat de 10.000 de milioane de zerouri".

Dintre savanţii englezi care au înţeles fondul problemei am să-l menţionez pe Sir d'Arcy Thompson şi lucrarea sa, *Growth and Form**[69]***, clasică de acum, şi pe J. Johnstone (*The Mechanism of Life*): „Felul de a fi al organismului viu implică încălcarea legii a doua a termodinamicii."

Putem, de altfel, răstălmăci fraza:

„Viaţa încalcă principiul minimei acţiuni (precum şi aspectele sale termodinamice, chimice, mecanice etc.)" prin enunţul:

„Viaţa nu încalcă întru totul legile fizico-chimice, ci într-un sistem închis care conţine materie vie ea acţionează ca şi cum ar veni dintr-o dimensiune exterioară (a cincea dimensiune de pildă, perpendiculară pe celelalte patru ale lumii einsteiniene)".

Aceasta nu mai înseamnă că legile fizico-chimice sunt cu adevărat zădărnicite, ci doar că viaţa acţionează sau poate acţiona ca o forţă exterioară chiar atunci când locaşul său vizibil se află într-un sistem închis[70].

Această acţiune a vieţii ca forţă exterioară spaţiului-timp al nostru cu patru dimensiuni se potriveşte cu ipotezele recente despre „câmpurile de forţe organizatorice autonome" elaborate de dr. Stromberg în Statele Unite şi de Raymond Ruyer (citat mai înainte) în Franţa; aceste câmpuri de forţe se pare că acţionează atât asupra dezvoltării embrionului din momentul fertilizării oului, cât şi asupra creşterii ulterioare, făcând să intre în rezonanţă cu ele circuitele electromagnetice şi electrice ale organismelor vii. Aceste câmpuri de forţe s-ar găsi, în parte, în afara spaţiului-timp obişnuit fizic şi ar opera astfel dintr-o dimensiune exterioară acestuia. Am văzut că undele de cunoaştere sau de probabilitate ne-au sugerat deja ideea unui spaţiu şi a unui subeter exterioare spaţiului-timp material.

În sistemele anorganice rolul principiului minimei acţiuni este, după cum am văzut, dominator şi uşor de descoperit; acţiunea lui directoare apare limpede în cristalografie (a se vedea mai înainte într-o notă explicativă descrierea creşterii cristaline făcută de Sir d'Arcy Thompson) şi în reţelele produse de echipartiţiile regulate şi semiregulate ale spaţiului (simetrii cubice şi hexagonale).

Dimpotrivă, în sistemele vii, atât în creştere, cât şi în morfologia generală, pulsaţiile asimetrice şi simetriile geometrice care apar la plante şi la organismele marine sunt pentagonale; pe de altă parte, aceste simetrii pentagonale nu apar niciodată în cristalografie deoarece pentagonul regulat, datorită structurii sale unghiulare, este

potrivnic echipartiţiei. Dintre florile cu simetrie pentameră (adică întemeiată pe numerele 5 şi 10 şi multiplii lor) citǎm toate florile arborilor sau arbuştilor cu fructe sau bace comestibile, genus rosa, lotusul, orhideea, căldăruşa, floarea-soarelui, iar într-o ordine malefică uriaşa stea de *Rafflesia Amoldi*; crinul, stânjenelul, macul, laleaua, iasomia, crinul de pădure au, dimpotrivă, simetrie „cristalină" hexagonală. Am pomenit mai înainte legătura strânsă dintre pentagon, şirul lui Fibonacci 1, 2, 3, 8, 13, 21, 34, 55 ... şi şirul $\emptyset$ al Secţiunii de Aur; aceste două şiruri permit o creştere omotetică (geometrică) prin însumări de unităţi egale, fapt care explică predominanţa lor în botanică, în conchiliologie, în proporţiile corpului omenesc şi în multe opere de artă (în conformitate cu principiul analogiei de Thiersch) aparţinând culturii de tip occidental în care se include şi Egiptul. Toate acestea ar trebui să facă parte dintr-un capitol despre „Frumuseţe şi Număr" care nu-1 voi include în cartea de faţă deoarece am tratat subiectul în amănunt în alte lucrări (în mod deosebit în Numărul de Aur). Voi spune doar câteva cuvinte în legătură cu o problemă de estetică în trei dimensiuni.

Întrucât şirul lui Fibonacci şi şirul $\emptyset$ produc o creştere armonioasă conform principiului analogiei pentru linii şi suprafeţe, am putea fi ispitiţi să vedem ce ar corespunde acestor două şiruri în spaţiul cu trei dimensiuni, să construim un şir aditiv în trei timpi care ar produce în spaţiu o creştere „gnomonică" bazată pe proporţiile volumului pur elementar, paralelipipedul dreptunghiular ale cărui proporţii a, b, c, cresc la fel ca termenii şirului căutat. Acest şir aditiv în trei timpi există cu adevărat. Este şirul 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 174...

Însă şirul geometric riguros corespunzător pe care-1 vom numi $\Psi, 1, \Psi^1, \Psi^2, \Psi^3, \ldots, \Psi^n \ldots$ în care $\Psi^n = \Psi^{n-1} + \Psi^{n-2} + \Psi^{n-3}$, din care s-ar putea obţine paralelipipedul drepunghic ideal cu proporţiile 1, Ψ, Ψ^2, are ca raţie rădăcina reală a ecuaţiei $\Psi^3 = \Psi^2 + \Psi + 1$, rădăcină care nu se poate exprima decât prin radicaluri la cub şi care, prin urmare, nu se poate construi după geometria euclidiană.

(Valoarea aproximativă a lui Ψ este 1,8395 ...).

Acest lucru nu are în practică nici o importanţă, întrucât cele mai multe planuri arhitecturale precum şi organismele vii care au un plan sau o axă de simetrie, modele în două dimensiuni bazate pe Secţiunea

de Aur şi pe şirurile Ψ şi F, sunt suficiente pentru a descoperi sau construi creşterile omotetice dorite.

CAPITOLUL XVI

NUMĂR ŞI POEZIE-NOTAŢIA LUI PIUS SERVIEN -DIHOTOMIA LIMBAJULUI-LIMBAJ ŞTIINŢIFIC ŞI LIMBAJ LIRIC-METAFORA ŞI ANALOGIA

Legea Numerelor generează, aşadar, simţămintele şi imaginile, iar ceea ce pare a fi exteriorul este pur şi simplu interiorul.
(FLAUBERT, Scrisoare către George Sand, 1876)

Nimeni nu contestă prezenţa sau influenţa ritmului în limba scrisă sau vorbită, sau în muzică; am văzut, de asemenea, că ritmul şi numărul erau concepte asociate în antichitatea greacă şi că rădăcina etimologică „rhein“ (a curge) din rithmos şi arithmos era aceeaşi, val, curgere de accente sau de monade. Dar, deşi în epoca Renaşterii elisabetane cuvântul „numere" se mai aplica ritmurilor poetice, de abia epocii noastre îi revine transpunerea în numere precise a ritmurilor, nu numai în poezie, ci şi în proză şi aceasta datorită lucrărilor lui Pius Servien şi egalei sale competenţe în estetică, prozodie, muzică şi matematică.

Am mai dat (în cap. II) definiţia, clasică de-acum, a ritmului; nu repet decât esenţialul[71].

„Ritmul este periodicitate percepută ... El acţionează în măsura în care o astfel de periodicitate deformează în noi curgerea obişnuită a timpului ... în felul acesta orice fenomen periodic perceptibil pentru simţurile noastre se desprinde din mulţimea fenomenelor neregulate ... pentru a acţiona singur asupra simţurilor noastre..."

Periodicitatea, în cazul ritmului sonor, se desprinde pe o textură, pe un spalier de elemente consecutive numărabile, silabe şi picioare în prozodie (picioarele sunt fie elemente tonice, foneme, fie, ca în prozodia grecească sau latină, grupuri cu durate determinate ce se pot măsura), note şi măsuri în muzică. Găsim aproape întotdeauna, atât în prozodie, cât şi în muzică, mai multe periodicităţi suprapuse, repetiţia izocronă (cu intervale de timp egale, ca tic-tacul unei pendule) picioare sau măsuri, silabe sau note care formează textura de fond, ca să spunem aşa, statică, pe care aleargă, suprapunându-se, combinându-se, periodicităţi mai complexe, deseori asimetrice, care constituie ritmuri dinamice propriu-zise: metrul şi ritmul. Dar periodicitatea izocronă, statică în aparenţă, a tic-tacului ceasului este, de fapt, de pe acum ritm (ascensiunea de la pauză la bătaie); duruiturile tobei, cu frecvenţe, intensităţi şi durate egale, constituie de asemenea o succesiune ritmată, fiecare element având un ritm dinamic intern. Aceeaşi observaţie e valabilă privitor la „ritmul în

spaţiu” dacă privim un mozaic sau o pardoseală cu motive repetate în chip uniform.

Ernest Lévy, într-o comunicare prezentată la primul Congres al ritmului, de la Geneva (1926), intitulată „Metrică şi ritmică”, sublinia faptul că cele două modele de ritm, cel static şi dinamic, sau, pentru a fi mai precişi, cadenţă statică sau metru, şi ritmul propriu-zis, dinamic, ne sunt oferite de două valuri fiziologice, cadenţa aproximativ stabilă a inimii omeneşti şi ritmul asimetric, dinamic, al respiraţiei, legat indisolubil de sistemul afectiv. Ernest Lévy precizează:

„Se numeşte *metru* energia desfăşurată după principiul ordinii, ritm energia dezvoltată după principiul cauzei şi al efectului”.

Remy de Gourmont scrisese deja că ritmul prozodic (timpii forte ai ritmului intensităţilor) coincide cu ritmul emotiv (timpii forte ai pasiunii). Nu trebuie decât să recităm o bucată prozodică cu încărcătură emotivă pentru a verifica justeţea acestei observaţii; acest ritm al accentelor de intensitate este, în limba scrisă sau vorbită, ritmul *tonic*. Voi cita aici o idee ingenioasă a lui Espe de Métz care-1 parafrazează pe Buffon:

„Stilul, adică expresia scrisă a ritmului personal ajutat de ritmul tonic, este omul însuşi.”

Pius Servien a insitat asupra însemnătăţii accentului de intensitate în limba franceză, fie că este vorba de o frază în proză sau de un grup de versuri. Acest ritm tonic coincide, în general, cu ritmul duratelor. Dar Pius Servien a elaborat şi o teorie originală a limbajului în general, în care îşi intercalează în mod cât se poate de logic teoria despre ritmuri cu analize doveditoare[72]. Voi rezuma în continuare modul logistic în care abordează problema limbajului în general.

El împarte limbajul scris în două părţi care prezintă caracteristici diferite şi care sunt, într-adevăr, cu toate că se folosesc de aceeaşi materie verbală, domenii diferite din punct de vedere logic. Unul este „limbajul ştiinţelor", celălalt „limbajul liric".

„Limbajul ştiinţelor" (logicienii pozitivişti sau empirişti folosiseră şi până acum acest termen însă fără să-şi dezvolte definiţia) pe care l-am putea numi şi „limbajul cunoaşterii" sau „limbajul logic", pe care-1 voi numi aici, pentru a simplifica, L.ş, are următoarele proprietăţi:

1° Fiecare din frazele lui are un singur înţeles şi nu mai multe.

2° Unei fraze în L.ş îi putem găsi oricând o altă frază echivalentă.

3° L.ş. poate fi tradus în întregime într-o altă limbă.

4° Sensul frazelor L.ş este independent de ritmul lor.

5° Când ne mărginim la L.ş, sensul operaţiilor sale, adevărat sau fals, va trebui să se bucure de proprietatea de a fi la fel de inteligibil pentru mai mulţi oameni, şi nu doar pentru unul singur. în chip virtual, pentru toţi.

6° Negarea oricărei propoziţii ş (care aparţine de L.ş) este, de asemenea, o propoziţie ş.

7° Dacă a *rezuma* este o operaţie posibilă, ne aflăm în L.ş.

L.ş. este o zonă a limbajului total; este mulţimea tuturor frazelor în legătură cu care este cu putinţă să se cadă întru totul de acord asupra înţelesului lor. Acest domeniu cuprinde fraze echivalente care se pot traduce dintr-o limbă în alta. În sfârşit (aceasta nu face parte din postulatele care însoţesc definiţia, dar constituie o teoremă de logistică): numărul înţelesurilor pe care îl putem transmite prin L.ş este un infinit numărabil.

Iată acum caracteristicile, mai greu de enunţat, ale „limbajului liric" sauL.l.:

1° Nici una din proprietăţile enunţate mai sus pentru L.ş. nu este adevărată pentru L.l. De exemplu, frazele L.l. nu au, fiecare, un înţeles, acelaşi pentru toţi. „Pentru asemenea fraze (scrie Pius Servien) nu există în lume nici o frază care să le fie echivalentă."

De pildă iată un vers din Claudel, în Soulierde Satin:

„L'Amerique, comme une immense come d'abondance, je dis ce calice de silence, ce fragment d'etoile".

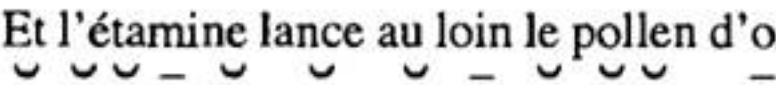
Aceste fraze se nasc din ritm, iar înţelesul lor nu este independent de ritmul lor. L.l. este o zonă a limbajului real în care sensul frazelor este strâns legat de ritmul lor. Sunt fraze ce nu pot fi reduse la L.ş. („Le vierge, le vivace et le bel aujourd'hui".)

2° L.l. este transcendent faţă de l.ş. însă unele cuvinte sunt lirice prin poziţia lor, altele prin natura lor.

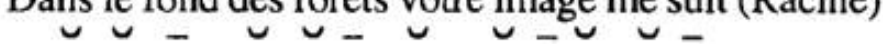
„Cu aceste cuvinte vii, nu ne este niciodată cu putinţă să ştim în ce măsură ne înţelegem unii cu alţii" (Pius Servien).

Am putea crede că Pius Servien, punând această transcendenţă a L.l. în raport cu L.ş., va renunţa să-l analizeze pe cel dintâi cu ajutorul celui de-al doilea, care este momentan unealta fundamentală a cunoaşterii precise. Dimpotrivă tocmai aici îşi va vădi întreaga lui ingeniozitate. Am văzut într-adevăr apărând cuvântul ritm asociat cu L.l.; or, cine spune ritm, spune număr. Şi tocmai ritmul tonic, pomenit mai înainte, ritmul accentelor de intensitate este acela care îi oferă mijlocul de a exprima imponderabilele lui L.l. în şiruri discontinui, adică în numere. El descompune, pentru aceasta, textura versului sau a prozei în *foneme*, adică în grupuri de silabe neutre terminate printr-o silabă tonică; fiecare frază (sau fiecare vers) va avea un număr *reprezentativ* N definit astfel:

N va avea atâtea cifre câte accente tonice are fraza; fiecare cifră reprezintă, aşadar, un fonem, un şir de silabe neutre terminate cu o silabă forte, o tonică. Versul lui Heredia, de pildă:

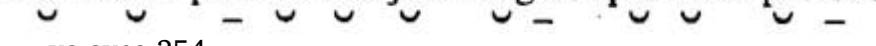


va avea ca număr reprezentativ 444.



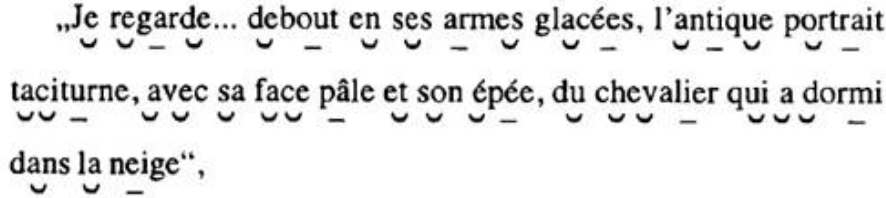
va avea 3333.

Ritm mai neregulat, dar foarte efectiv, de asemenea, în asimetria lui: Elena Văcărescu)



va avea 354.

Din proza lui Henri de Regnier:


„Je regarde... debout en ses armes glacées, l'antique portrait
taciturne, avec sa face pâle et son épée, du chevalier qui a dormi
dans la neige",

va avea N = 3333, 233, 64, 443.

În prozodie, în notaţia lui Pius Servien, vocalele mute de la sfârşitul unui vers nu se socotesc, dar sunt însemnate cu un apostrof după tonica fonemului pe care îl închide.

Exemplu:

N = 4224'.

Vedem că la toate aceste texte specific lirice (inclusiv proza lui Henri de Regnier) se aplică remarca lui Pius Servien (în legătură cu un alt exemplu):

„Toate proprietăţile ritmice ale textului (din punct de vedere tonic şi aritmetic) sunt strânse în acest număr, tot ce este străin a fost înlăturat".

Am obţinut *invariantele* ritmurilor. Pius Servien îşi prezentase deja notaţia în lucrarea *Eseu asupra ritmului tonic al limbii franceze*, însă de abia în *Principii de estetică* (Boivin et Cie) ne arată pe ce cale logică şi chiar logistică a ajuns să execute turul de forţă de a capta toate calităţile unui text liric, calităţi nemateriale şi transcendente prin definiţie în raport cu L.ş., printr-o notaţie discontinuă luată din ceea

ce este mai concret în L.ş, din aritmetică.

Iată prezentarea „logistică” a tehnicii, văzută din culise. Pentru a descrie legile, proprii expresiei lirice dacă există vreuna, putem:

Să-i dăm unui „elector”, L, care nu ascultă de criteriul liric, sarcina de a face o clasificare λ a fenomenelor din domeniul liric (adică să aleagă după acest criteriu un anumit număr de texte cu caracteristici, pozitive sau negative, care le situează în clasa definită mai înainte ca L.I.), apoi:

Să supună examinării aceste rezultate cu ajutorul unui „controlor” S, pentru a vedea dacă găseşte în ele caractere care aparţin L.ş., ce i-ar permite, eventual, să facă o clasificare $\sum$ în termeni caracteristici sau logistici care ţin de L.ş.

Pius Servien constată că, în orice text ales de elector ca fiind liric, controlorul recunoaşte o structură sonoră regulată sub formă de periodicităţi numărabile, de ritmuri (elucidate prin medota explicată mai înainte a numerelor N caracteristice); „această structură sonoră se traduce în cifre distribuite nu la întâmplare, ci după o anumită lege simplă”.

Vom observa că Pius Servien foloseşte pentru silabele lirice şi neutre simbolurile $- \text{ şi } \smile$ din analiza metrică şi prozodică în care desemnează silabele lungi şi scurte. Acest procedeu este pe deplin îndreptăţit, deoarece (am spus-o mai înainte) ritmul de intensitate şi cel al duratelor coincid, în general.

Iată un exemplu de ritm în întregime trohaic (folosit rar în limba franceză), ultimele versuri din frumoasa odă închinată Afroditei, parafrazată de Pius Servien prin folosirea măsurilor antice:

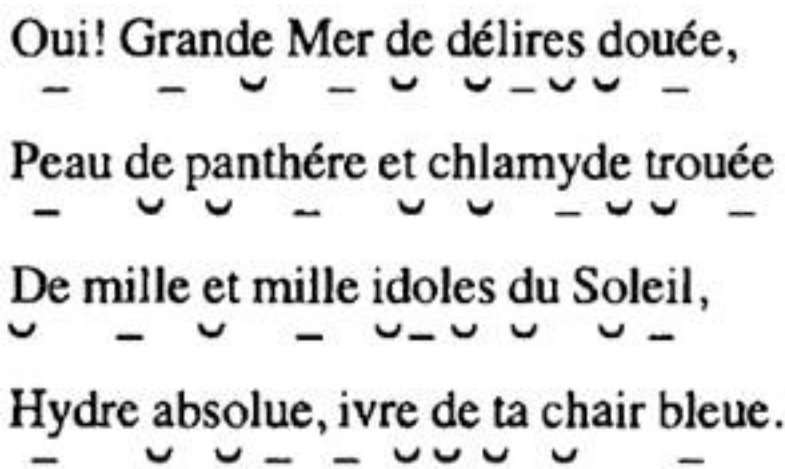
laisse ton sein crispé peser sur mon âme, ô Caresse,
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑⏑ –

lourd comme toutes nos peines, brûlant comme Eros l'avide
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ –

laisse tes boucles d'étoiles flotter sur mes yeux qui s'aveuglent...
– ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ – ⏑ ⏑ ⏑ –

N = 132233', 133332', 133333'

Şi explozia trohaică din „Cimitirul marin“ de Val6ry:


Oui! Grande Mer de délires douée,
Peau de panthére et chlamyde trouée
De mille et mille idoles du Soleil,
Hydre absolue, ivre de ta chair bleue.

N = 11233’ 1333’ 2224’ 1315’

Pius Servien îşi încheie expunerea (*Les rythmes comme introduction physique â 1' Esthetique*, Boivin et Cie) cu afirmaţia:

„Noi admitem deci, în principiu, că ori de câte ori vorbim de ritmuri, percepem, mai mult sau mai puţin sigur, numere”. Şi:

„Se pare că singura noţiune numerică în stare să urmeze noţiunea de ritm în toată extinderea ei este aceasta: Şirul numerelor întregi în care descoperim o lege simplă”. Regăsim „periodicitatea percepută”. Nu este, aşadar, nevoie să-mi cer iertare pentru că am introdus acest rezumat al metodelor lui Pius Servien într-o lucrare închinată Numărului[73].

După cum s-a exprimat Paul Claudel în unul din luminoasele lui comprimate: „Inspiraţia poetică se deosebeşte prin darul imaginii şi al numărului".

Am descoperit Numărul, hai să ne ocupăm acum de imagine, prin mijlocirea analogiei şi, pentru aceasta, să evocăm iarăşi afirmaţia dintre analogie şi proporţie, menţionată încă de la începutul acestor lucrări. Am amintit că noţiunea de proporţie geometrică

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. nu este decât imaginea sau, mai degrabă, transcrierea matematică a unui principiu general al analogiei:

A este faţă de B cum este C faţă de D; A, B, C, D fiind valori oarecare, mărimi, calităţi etc. În geometrie, proporţia geometrică introduce omotetia, similitudinea formelor în conformitate cu cele două teste capitale ale esteticii, fraza cheie a lui Vitruviu despre simetire în sensul antic al cuvântului şi principiul analogiei al lui Thiersch: „Am descoperit, cercetând operele cele mai izbutite din toate timpurile, că în fiecare din aceste opere se repetă o formă fundamentală şi că părţile alcătuiesc, prin compunerea şi dispunerea lor, figuri asemenea. Armonia nu reiese decât din repetarea figurii

principale a operei în subdiviziunile ei”.

Este vorba, după cum se vede, de similitudine, de omotetie, nu de identitate, de egalitate superpozabilă. Fraza lui Thiersch este o reflectare a principiului analogiei în natură, enunţat acum două mii cinci sute de ani de Pythagoras, versul din Hieros Logos[74]. Alberti, la sfârşitul secolului al XV-lea, repetă aceiaşi termeni ai lui Pythagoras.

Apoi, principiul analogiei este uitat, excepţie făcând grimoarele alchimiştilor, şi reapare în chipul cel mai neaşteptat în povestirea lui Edgar Poe, care introduce în literatură cel dintâi tip de detectiv, *Scrisoarea pierdută*.

Acest detectiv, foarte discretul şi cultivatul Chevalier Dupin, care răsfoise probabil, în clipele lui de răgaz, dacă nu „Versurile de aur“ ale lui Pythagoras, cel puţin vreun tratat de al lui Paracelsus sau Agrippa, se exprimă astfel:

„Lumea materială este plină de analogii riguroase care corespund lumii nemateriale şi se pare că o oarecare aparenţă de adevăr ar fi legată de dogma propusă în retorică, după care metafora sau comparaţia pot fi corect folosite în întărirea unui argument sau pentru a înfrumuseţa o descriere”.

Metafora este, într-adevăr, transpunerea analizei în general în domeniul literaturii, proză sau poezie. Expresia generală a analogiei: A este faţă de B aşa cum este C faţă de D poate reprezenta atât o metaforă, cât şi o proporţie geometrică, dar metafora se întâmplă să fie rar amănunţită în patru termeni expliciţi, căci o metaforă bună trebuie să prezinte, pe lângă una sau două comparaţii potrivite, o condensare eliptică şi un element neaşteptat, o surpriză, o iluminare. De aceea este de multe ori redusă la 3, 2 sau chiar la un singur termen: metaforele eliptice frapante (uneori absurde) sunt, în general, cele mai bune, în poezie cel puţin.

Definiţia cea mai mulţumitoare a metaforei este tot aceea a lui Aristotel; pentru el, a găsi o metaforă bună este „un semn de geniu original, deoarece o metaforă bună implică perceperea intuitivă a similitudinii în lucruri neasemănătoare”.

Dăm iarăşi de principiul analogiei. Am dat, în alte lucrări, exemple de metafore cu număr variabil de termeni; Victor Hugo şi Shakespeare au fost regii acestui domeniu, izbutind metafore riscate până la absurd...

Un exemplu perfect de metaforă articulată (cu patru termeni)

„Et comme un *air* qui sonne au *bois creux* des quitares,

J'ai fait chanter mon *rêve* au vide de ton *coeur*...“

air în *bois creux* ca şi *reve* în *cceur* are exact aceeaşi structură ca:

A faţă de B ca C faţă de D. Şi *bois creux* şi *vide* aduc o comparaţie adiţională.

În primele două versuri din poemul lui L. Bouillet, doi dintre termeni sunt reduşi la unul singur, *l'archet*, la propriu şi la figurat.

Tu n'as jamais *été*, même aux jours Ies plus rares,
qu'un banal *instrument* sous mon *archet* vainqueur.

Exemple de metaforă cu un singur termen:

„My salad days“ a lui Shakespeare şi extraordinara şi intraductibila expresie a lui Edgar Poe „Of late, etemal *condor* years...“ în care anii tumultuoşi sunt comparaţi cu nişte condori ale căror aripi gigantice zguduie cerul cu bătăile lor.

Să urmărim mai îndeaproape calea pe care a parcurs-o conceptul analogiei în literatura franceză după Edgar Poe:

Charles Baudelaire: „Imaginaţia este cea mai ştiinţifică dintre facultăţi întrucât numai ea cuprinde analogia universală".

Scrisoare a lui Paul Valéry, în vârstă de 18 ani, către Mallarmé pe care nu-1 întâlnise încă:

„O devoţiune deosebită faţă de Edgare Poe mă sileşte să proclam analogia drept adevăratul regat al Poetului. El trebuie să facă perceptibile rezonanţele încărcate de taină ale lucrurilor şi armonia lor ascunsă tot atât de reale, tot atât de sigure ca un raport matematic pentru toate spiritele înclinate spre artă, adică în chip firesc, pasionat, idealiştii”. De reţinut introducerea intuitivă a raportului matematic.

În primul răspuns dat lui Valéry, Mallarmé scrie:

„Dragă Poete,

Darul analizei subtile, cu muzica adecvată, îl ai, desigur, şi asta-i totul".

Iată acum, inspirată şi ea mi se pare tot din fraza lui Chevalier Dupin, faimoasa scrisoare a lui Mallarmé către Verlaine, care precizează că:

„Explicarea orfică a Pământului este singura datorie a poetului şi jocul literar prin excelenţă".

Spiritul pătrunzător al lui Huysmans descoperise foarte bine această obsesie a analogiei la Mallarmé. Astfel, în *A Rebours*:

„Percepând cele mai îndepărtate analogii, desemnând adeseori printr-un termen care oferea, în acelaşi timp, printr-un efect de similitudine, forma, mireasma, culoarea, cantitatea, strălucirea..., izbutea să stabilească astfel enunţul comparaţiei care se statornicea, absolut singură, în mintea cititorului, prin analogie, de cum pătrundea simbolul.”

Şi Jung:

„Analogia este singura limbă priceptă de subconştient”.

CAPITOLUL XVII

NUMĂRUL ŞI MUZICA-TEORIA MATEMATICĂ A GAMELOR-MODULAŢIE, PROPORŢIE, EURITMIE

Muzica este pentru Timp ceea ce este Geometria pentru Spaţiu.
(Francis WARRAIN)

Dacă pentru aceia care nu cunosc teoria lui Pius Servien rolul numerelor în poezie poate părea neclar, nu acelaşi lucru se întâmplă când este vorba de muzică. Toată lumea ştie, într-o mai mică sau mai mare măsură, că notele gamei au frecvenţe diferite, de care depinde înălţimea sunetului, frecvenţe exprimate prin numere; alţii ştiu că sunetele, chiar cele nemuzicale, pot fi analizate prin şiruri sinusoidale care exprimă „armonicele" în care aceste sunete pot fi, în general, descompuse; dar noţiunile acestea rămân deseori vagi, iar cei care le deţin au impresia sau teama că frumuseţea, intensitatea emoţiilor sau senzaţiilor stârnite de muzică, serioasă sau uşoară, ar fi stricate dacă s-ar încerca identificarea acestor senzaţii eterate sau plăcute cu nişte entităţi aşa de prozaice şi seci cum sunt şirurile de numere.

Dimpotrivă, pitagoreicii, a căror teorie muzicală se întemeia încă de la început pe studiul matematic al intervalelor dintre note, al lungimii corzilor ce corespund acestor note şi pe conceptul de proporţie (aritmetică, geometrică sau armonică), care constituia baza acestui studiu, socoteau că este firesc ca numerele, care reglau sau închistau fără putinţă şi tăgadă armonia unui cosmos bine rânduit, să aibă acelaşi rol în artă în general, în muzică în particular.

Aşa cum a scris Leibniz, după mai bine de 2000 de ani de la Pythagoras: „Muzica este un exerciţiu de aritmetică secretă, iar cel care se consacră ei nu ştie că mânuieşte Numere". (Scrisoarea către Goldbach din 17 aprilie 1712). Voi încerca în continuare să-l iniţiez pe cititorul benevol în rolul precis al numerelor în muzică sau, ca să fiu mai puţin pretenţios, în teoria gamelor, instrumente esenţiale ale armoniei muzicale.

Atât în cristalografie, cât şi în muzică, armătura principală a acestei matematici a gamelor o constituie tocmai „numerele mici", 2, 3, 4, 5. Am văzut până acum că Tetraktys-ul 1, 2, 3, 4 dădea raporturi proporţionale cu fracţiile corespunzătoare intervalelor fundamentale, adică raporturilor lungimilor corzilor unei lire tetracorde fundamentale; fracţiile erau 2/1 sau 4/2 pentru octavă, 4/3 pentru cvartă, 3/2 pentru cvintă. Dar este mai bine pentru început să examinăm felul în care a stabilit Pythagoras gama diatonică sau pitagoreică, bază a gamelor occidentale de mai târziu cât şi a gamelor

moderne, majoră şi minoră şi a gamei temperate cromatice.

Ne dăm îndată seama că numărul cinci joacă aici, ca şi în artele vizuale şi în morfologia organismelor vii, un rol precumpănitor cu toate că în Tetraktys el nu apare decât ca suma dintre 2 şi 3 sau câtul

$$\frac{1+2+3+4+5}{2}$$

Acest rol se manifestă între altele prin însemnătatea pe care o are *cvinta* în stabilirea scării diatonice şi în structura acordurilor perfecte.

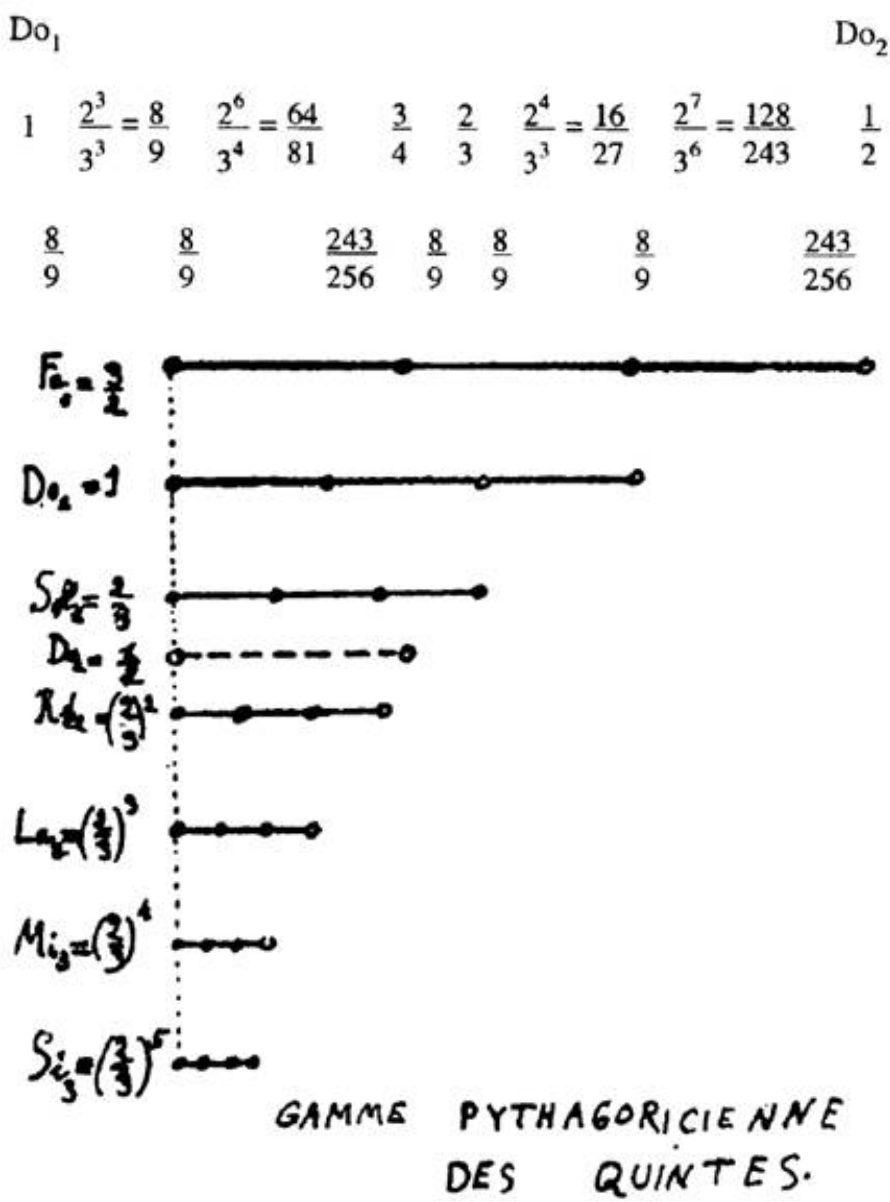
Gama diatonică primitivă sau gama lui Pythagoras este întemeiată într-adevăr pe intervalul[75] de cvintă, care desparte sunetele emise de două corzi omogene ale căror lungime se află în raportul 2/3.

Dacă ne închipuim şapte corzi de lungimi descrescătoare astfel încât fiecare să fie egală cu 2/3 din cea precedentă (planşa XIX) şi dacă luăm coarda a doua ca unitate de lungime, numind-o Do_1 putem da celor şapte corzi, începând cu prima următoarele nume:

Fa_0	Do_1	Sol_1	Re_2	La_2	Mi_3	Si_3
$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$

Fracţiile de sub note reprezintă lungimile corzilor dacă luăm pe Do_1 ca unitate.

Fiecare coardă este prin definiţie cvinta justă (ascendentă) a celei precedente; o nouă coardă cu lungimea 1/2, situată între Sol_1şi Re_2va fi „în octavă" de Do_1 şi va lua numele de Do_2. Trebuie acum să aducem în interiorul octavei Do_1-Do_2 notele care au aceleaşi timbruri caFa_0, Re_2, La_2, Mi_3 şi Si_3, pentru aceasta este de ajuns să împărţim pe Fa la 2 obţinând astfel octava ei Fa_1 (este vorba de lungimile corzilor), să înmulţim cu 2 pe Re_2 şi pe La_2 şi cu 2^2 pe Mi_3 şi pe Si_3 (frecvenţele vor fi de fiecare dată *împărţite* la numărul corespunzător 1/2, 2, 2^2). Obţinem astfel:



PLANȘA XIX

Vedem că tocmai a 5-a notă furnizează intervalul de cvintă în raport cu fundamentala, de unde numele de cvintă. Am obţinut astfel gama diatonică pitagoreică; rândul următor dă frecvenţele corespunzătoare (invers proporţionale cu lungimile corzilor), luând pentru Do_1 pe 2, 5, 6 din Do din „gama fizică” în care notele Do sunt reprezentate prin puterile lui 2 începând cu 16, adică $2^4 = 16$;

$2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $2^7 = 128$; $2^8 = 256$ etc.

Frecvenţele gamei diatonice pentru $Do_1 = 256$.

Do_1	Re_1	Mi_1	Fa_1	Sol_1	La_1	Si_1	Do_2
256	288	324	$341\frac{1}{2}$	384	432	486	512
	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{243}{256}$

Al doilea rând dă intervalele[76] dintre notele succesive (8/9 este tonul diatonic, 243/256 este semitonul diatonic); acest rând se mai poate scrie şi astfel:

Ton ton Semiton Ton ton ton Semiton.

Vedem că gama diatonică, din cauza principiului generării prin cuvinte, este *asimetrică*, fapt care îi dă calităţile melodice şi tonale, precum şi jocul modulaţiilor ce se poate scoate din ele; aceasta se aplică şi gamelor moderne care au ieşit din ea, gama majoră şi gama minoră (aceasta în trei varietăţi).

Suita tonală cea mai înaltă este, totodată, cea a modului lidian antic şi a modului major actual.

Pitagoreicii obţineau, de asemenea, gama diatonică plecând de la un do fundamental şi intercalând două tonuri între *do* şi cvarta sa, socotită 3/4, şi alte două între cvinta sa, socotită 2/3 şi octava 1/2.

Tonul 8/9 este „diferenţa" dintre cvartă şi cvintă, diferenţă având aici semnificaţia de cât, ca în notaţia logaritmică (sumă va însemna, de asemenea, în realitate produs). Gama diatonică va apărea atunci în mod automat, iar semitonurile Mi-Fa şi Si-Do, asimetriile fundamentale, se impun (Semitonul 243/256 este numărul cu care trebuie să înmulţim pe 8/9 x 8/9 pentru a obţine 3/2, iar 128/256 pentru a obţine 1/2)

Gama majoră modernă este o gamă paralelă ca structură cu gama diatonică pitagoreică, însă derivată teoretic din şirul armonicelor (vom vedea mai departe în cel fel), ceea ce face ca intervalele sale să se deosebească puţin de cele pitagoreice.

Iată gama majoră

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do	notele
1	8/9	4/5	3/4	2/3	3/5	8/15	1/2	lungimea corzilor
256	288	320	341	384	426	480	512	frecvențele
	8/9	9/10	15/16	8/9	9/10	8/9	15/16	intervalele

Seria Ton Ton Semiton Ton Ton Ton Semiton rămâne valabilă ca structură însă în locul unui singur ton distonic avem două tonuri uşor diferite, 8/9 şi 9/10. Semitonul este 15/16 în loc de 243/256. Valoarea 256 pentru Do este si aici luată din şirul „natural" al octavelor $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ ... $2^8 = 256$.

PLANȘA XX

Avem trei game minore:

1° Gama în *La* - fără alteraţii (vom vedea mai departe ce înseamnă acest lucru)

La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La
	T t	T^1	T	t	T	T^1	

echivalentă cu Do re Mi^b Fa Sol La^b Si^b Do; aceasta este gama minoră clasică sau pitagoreică derivată din modurile antice, eolian sau hipodorian.

2°	Do	Re	Mi^b	Fa	Sol	La	Si	Do
	T	t	T'	T	T'	T	t	
3°	Do	Re	Mi^b	Fa	Sol	La^b	Si	do
	T	t	T'	T	t	t' + T	t	

Cu T sau T' ton, t sau t^1 semiton

T = 8/9 T' = 9/10 t = 15/16 t^1 = 24/25

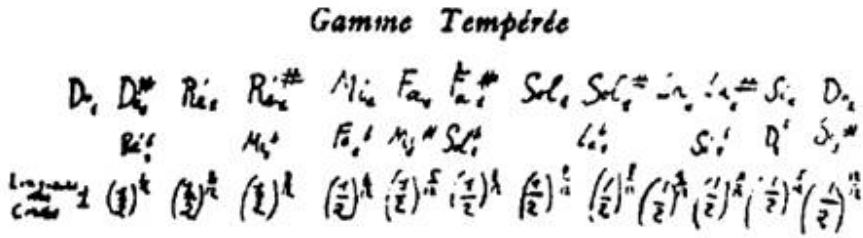
Principiul alteraţiilor (diezi şi bemoli ale căror notaţii le-am introdus fără aviz prealabil) provine, de asemenea, din Gama pitagoreică a cvintelor. Referindu-se într-adevăr la ea şi la formarea ei prin repetarea notelor în octavă ne putem da seama că cvinta justă a lui Si_3 nu este $Fa_4 = 3/2^5$ ci $2^5/3^5$ x 2/3 = $2^6/3^6$, iar $3/2^5$ este mai mare decât $2^6/3^6$. Numim această cvintă justă (trei tonuri şi un semiton) a lui Si, Fa_4 sau Fa_4 diez. Continuând înşiruirea cvintelor ascendente obţinem cvintele juste $Fa_4^{\#}\ Do_5^{\#}, Do_5^{\#} Sol_5^{\#}, Sol_5^{\#}\ Re_6^{\#}, Re_6^{\#}\ La_6^{\#}, La_6^{\#}\ Mi_7^{\#}, Mi_7^{\#} Si_7^{\#},$ toate aceste note cu diez putând fi introduse şi în intervalul octavei prin multiplicări apropiate cu puteri ale lui 2 (o notă situată în octava ascendentă a alteia corespunde unei corzi cu o lungime de două ori mai mică, dar cu frecvenţa de două ori mai mare, ş.a.m.d.; a n octavă va corespunde unei lungimi de 2^n ori mai mică însă unei frecvenţe mai mare de 2^n ori. În acelaşi fel, pentru octavele joase, coborâtoare, este invers: lungimile cresc, frecvenţele se micşorează asemenea puterilor n ale lui 2).

De asemenea, dacă încercăm să alcătuim şirul coborâtor al cvintelor vom vedea că cvinta gravă al lui Fa_0, în loc să coincidă cu $Si_{-1} = 2^9/3^5$, este dată de o coardă cu lungimea $(3/2)^2$ care cade între La_{-1} şi Si_{-1}, căci $La_{-1} = 2^6/3^3 > (2/3)^2 > 2^9/3^5$. Numim Si_{-1} bemol sau Si_{-1}^{b} nota corespunzătoare acestei corzi cu lungimea $(2/3)^2$. Intervalul care desparte o notă naturală de nota sa cu diez (mai înaltă) este semitonul cromatic $2^{11}/3^7$; acelaşi interval desparte o notă naturală de aceeaşi notă cu bemol (mai gravă). Când

temperăm gama, cum se întâmplă cu pianele obişnuite, egalăm $Do^{\#}$ şi Re^{b} ect., anulând, „coma pitagoreică", $2^{19}/3^{12} = 0{,}98656$ ..., care desparte în realitate o notă cu bemol de nota cu diez din nota precedentă (o gamă care ar conţine toate notele cu diezi şi bemoli prin intervalele lor teoretice ar fi riguros *cromatizată*). Coma pitagoreică de care tocmai am pomenit are ca fracţie caracteristică „diferenţa" (în realitate câtul) dintre semitonul cromatic şi semitonul diatonic, $2^{19}/3^{12} = 2^{1}\ V3^{7} : 3^{5}/2^{8}$.

Gama majoră poate, de asemenea, să se „cromatizeze"; notele, „alterate";diezii şi bemolii se introduc atunci în felul următor: se diezează o notă urcând-o cu un semiton minor, adică înmulţind-o cu $24/25 = 9/10 : 15/16$ şi micşorând astfel cu a 25-a parte lungimea cozii care scoate această notă; se bemolizează o notă coborând-o cu un semiton minor, adică înmulţind-o cu 25/24, mărind astfel cu 1/24 lungimea corzii corespunzătoare.

În gama temperată propriu-zisă, care figurează pe pianele obişnuite, diezii şi bemolii sunt identificaţi, fapt care ne dă medii aproximative ale cromatismelor exacte ce sunt suficiente în practică, În această gamă, cele 12 intervale sunt repartizate în mod egal într-o progresie geometrică cu raţia $\sqrt[12]{2}$.



Rândul al doilea reprezintă lungimile corzilor. Să reţinem că deşi gama temperată procedează prin intervale egale (fiecare semiton este egal cu $\sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 0{,}944$) octava nu este asemănătoare cu ea însăşi în toate părţile ei; contracţiile Mi Fa şi Si Do rămân, cvinte pitagoreice, moştenite de la zona diatonică, asimetrică, fapt care înlătură monotonia unei simetrii monotone perfecte (care apare în gama cu tonuri întregi folosită uneori de Debussy).

Mai există şi o altă metodă pentru a construi gama majoră naturală sau gama fizicienilor (numită şi gama lui Zarlin), plecând de la principiul afinităţii sunetelor (două sunete sunt cu atât mai înrudite cu cât au mai multe armonice) şi de la teoria armonicelor. Se întâmplă

că fiecare notă pură emisă de un instrument sau de vocea omenească este însoţită aproape imediat de notele a căror frecvenţă este un multiplu întreg al frecvenţei notei fundamentale, note pe care le numim armonice. Luăm ca unitate nota fundamentală, frecvenţa ei şi atunci frecvenţele celorlalte armonice sunt reprezentate de numerele lor de ordine, 2, 3, 4, 5, ... n. Intervalele care despart aceste armonice succesive sunt reprezentate de fracţiile 2/1, 3/2, 4/3, 5/4 ... care sunt de forma $\frac{n+1}{n}$ remarcată deja de Archytas din Tarent.

Dacă primul sunet armonic este Do_1, al doilea, care este în octavă (frecvenţa înmulţită cu 2) va fi Do_2, al treilea, despărţit de nota precedentă printr-un interval de cvintă 3/2, va fi Sol_2, al patrulea , despărţit de a treia notă printr-un interval de cvartă 4/3, va fi a doua octavă Do_3 de la Do_1. Cea de a cincea notă dă Mi_3, cea de a şasea Sol_3 totul fiind în gama majoră; această gamă armonică este gama fizicienilor.

Să vedem câteva axiome ale fizicii sunetului. Mai întâi, distincţia dintre zgomot şi sunet muzical. Zgomotul este o funcţie sonoră neperiodică a timpului. Pentru a-l integra în muzică, trebuie să i se dea o periodicitate pe care o dobândim prin repetiţie ritmică şi prin jocul armonicelor. Orice sunet (de la tobă până la flaut) este alcătuit dintr-un zgomot şi un sunet muzical; muzica foloseşte zgomotul pentru ritm, iar sunetul muzical pentru motivul melodic (înlănţuire a sunetelor şi a intervalelor lor) şi pentru armonie (acorduri de sunete simultane).

Un sunet este numit simplu sau pur atunci când vibraţia care îi dă naştere este o funcţie sinusoidală a timpului (ondulaţie regulată); este numit complex în toate celelalte cazuri. Orice sunet complex este numit muzical atunci când vibraţia care îi dă naştere este o funcţie periodică a timpului; în caz contrar, sunetul va fi zgomot. Aşadar, sunetul simplu sau pur este întotdeauna muzical. Aici îşi găseşte locul teorema lui Fourier:

Un sunet muzical complex poate fi socotit drept suma unui şir de sunete simple ale căror frecvenţe sunt multiplii aceluiaşi număr numit *frecvenţă fundamentală*. Sunetul cel mai grav este numit fundamental sau *armonic prim*, sunetul cu frecvenţă dublă este numit armonic secund etc.

Înălţimea unui sunet este determinată de frecvenţa armonicului cel mai intens, în general sunetul fundamental, basul.

Timbrul unui sunet rezultă din alcătuirea lui armonică (frecvenţe, intensităţi vibratorii). Senzaţia auditivă de înălţime totală începe pe la 40 de vibraţii duble pe secundă şi încetează pe la 20.000 (la copii) sau 12.000 (la bătrâni).

Orice mărime periodică având perioada T poate fi considerată ca o

sumă de mărimi periodice T, T/2, T/3, T/4 ... cu frecvenţele N, 2N, 3N, 4N ... zise armonice.

Mai general:

Orice curbă, de orice natură ar fi, poate fi riguros reconstituită prin suprapunerea unui număr suficient de curbe armonice (periodice) simple; dacă prima curbă nu are diviziuni periodice este socotită pe toată lungimea ca o semiperioadă a unei curbe periodice. Acest lucru îşi găseşte analogia în ritmurile vizuale; elementul unei curbe neregulate oarecare îşi are ritmul potenţial pe care ochiul îl extrapolează în mod automat, făcând din el elementul unui ritm periodic, datorită indicaţiei unei proporţii. Tocmai acest element al proporţiei determină aici ritmul explicit sau mascat. Aceasta nu se aplică, evident, curbelor ieşite din haosul absolut asemenea traiectoriilor unei molecule în mişcare browniană. (Toate acestea îşi găsesc la rândul lor analogii în muzica zisă atonală.)

Axioma lui Helmholtz:

„Sunetele au cele mai multe afinităţi atunci când au mai multe armonice comune şi când aceste armonice sunt mai intense faţă de celelalte". Acest lucru se întâmplă pentru două sunete atunci când raportul frecvenţelor sunetelor fundamentale este cel mai simplu cu putinţă (exemplul intervalului de cvintă 3/2 şi acordurile care îl conţin).

Regula raporturilor simple reiese îndată de aici:

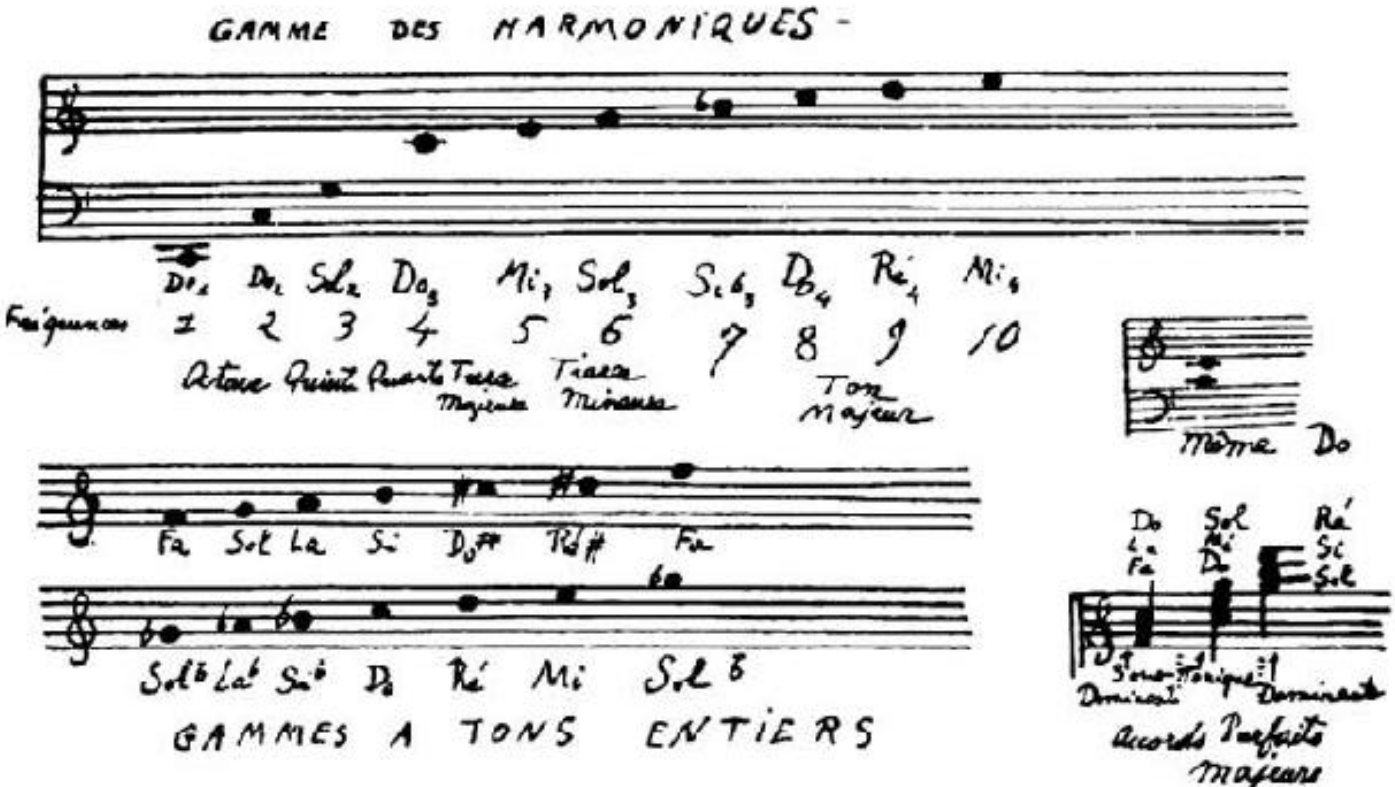
„Dacă N şi N' sunt numerele vibraţiilor pe secundă ale sunetelor fundamentale a două sunete complexe şi dacă N/N' = m/n, m şi n fiind numere întregi simple, atunci al n-lea armonic al primului va coincide cu al m-lea armonic al celui de al doilea, fiindcă m × N' = n × N.De asemenea, armonicele de ordinul 2 m şi 2n, 3 m şi 3n etc. coincid; vor exista cu atât mai multe armonice cumune cu cât m şi n sunt mai mici.

Urechea descompune orice mişcare complexă periodică într-un şir de vibraţii sinusoidale care corespunde, fiecare, senzaţiei unui sunet simplu. Acestea sunt armonicele: urechea descompune şi transpune o funcţie periodică oarecare în şirul lui Fourier. De reţinut că anumite „creiere electronice" execută magistral aceeaşi operaţie. Urechea este înzestrată cu o harpă microscopică având 3.000 de corzi, ea are în acest fel un sonometru, rezonatoare care vibrează fiecare la maximum pentru un sunet simplu cu înălţimea determinată.

S-a izbutit, din întâmplare, cu ajutorul unor mecanisme ingenioase (ale unor păpuşi care ziceau „tată" şi „mamă") să se constituie voci omeneşti artificiale „care n-au vorbit niciodată". Am văzut, de asemenea, că orice curbă poate fi reconstituită suprapunând unde periodice; armonicele combinate reproduc sunetul fundamental.

Când două (sau mai multe) sunete pure, care sunt armonicele aceleiaşi note fundamentale, sunt emise în acelaşi timp, urechea adaugă această notă şi mai multe dintre armonicele sale; aceste tonuri nu sunt pur subiective, ci există cu adevărat. De asemenea, atunci când se emit două note oarecare despărţite de o cvintă sau de o cvartă, se aude nota care se află în octava joasă din nota cea mai joasă; această notă, este „tonul de diferenţă". În general, două note auzite o evocă pe a treia, care operează sinteza lor; aceasta este nota simetrică (ca frecvenţă) a notei ascuţite faţă de nota joasă şi va juca rolul de tonică instantanee.

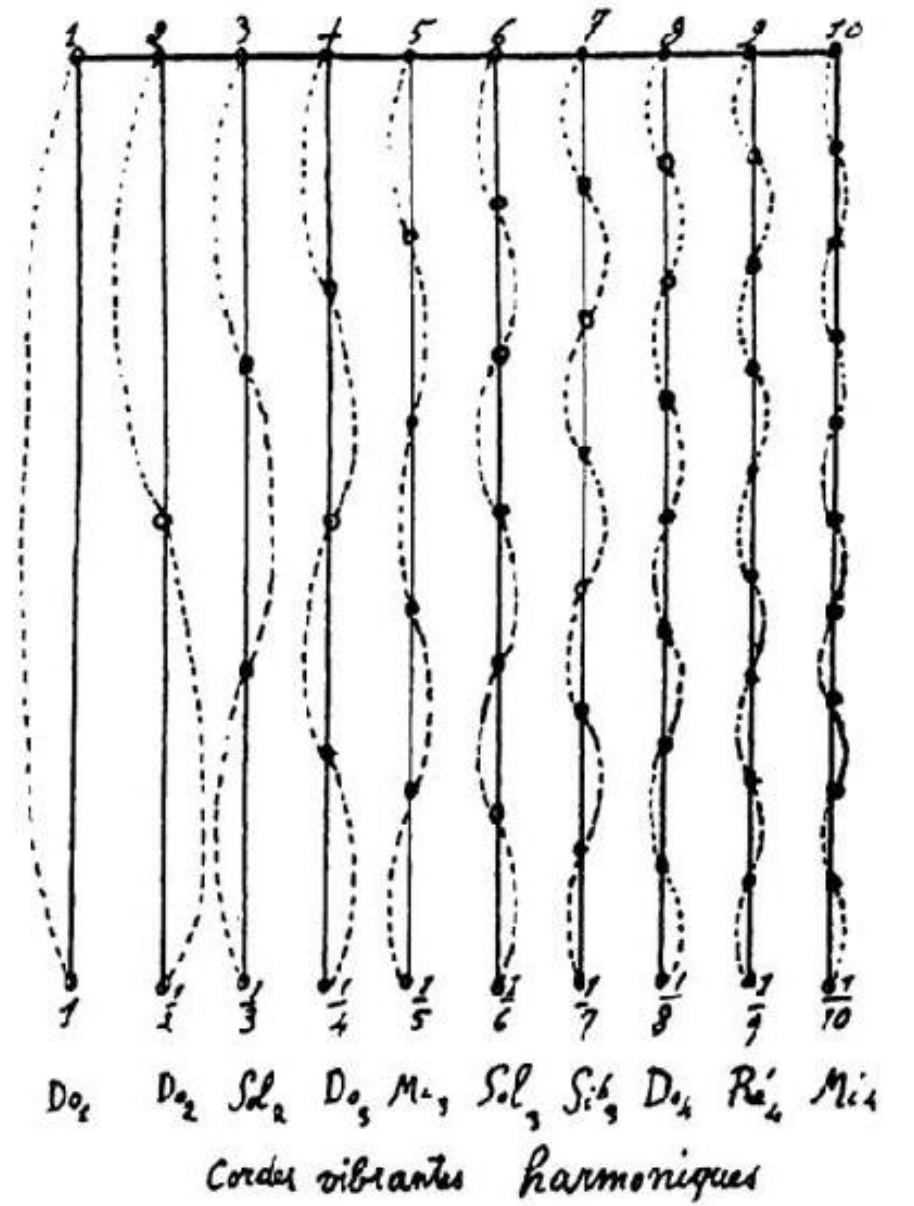
Iată acum gama armonicelor sau a fizicienilor; întrucât cea de-a şaptea armonică riguroasă nu coincide cu o notă pură din gama majoră este corectată, înlocuindu-se această a şaptea armonică cu Si^b care este o aproximaţie. Această mişcare se repetă în cazul tuturor armonicelor, al căror număr de ordine este un multiplu de şapte (planşa XXI; în partea de jos a planşei este înfăţişată gama cu tonuri întregi despre care va fi vorba mai târziu).



PLANȘA XXI

Planșa XXII înfățișează gama armonicelor cu corzile împărțite proporțional cu frecvențele.

A șaptea armonică naturală este ceva mai joasă decât $Si^{\flat}$ (se intercalează între La_3 și $Si_{\flat 3}$).



PLANŞA XXII

Să trecem acum de la notele simple şi intervalele lor două câte două cântate simultan sau succesiv la acordurile propriu-zise de trei note (sau mai multe), care introduc elementul „proporţie”.

Intervalele măsurate de la nota tonică sau fundamentală până la notele succesive sunt:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do

Do Re secundă
Do Mi terță (majoră, două tonuri)

(Do Mi^b ar fi terța minoră, un ton și jumătate, la fel Re Fa sau La Do)

Do Fa cvartă (două tonuri și jumătate)
Do Sol cvintă (trei tonuri și jumătate)
Do La sextă majoră (patru tonuri și jumătate)

(Do $Sol^\#$ ar fi sexta minoră, patru tonuri)

Do Si sextă (cinci tonuri și jumătate)
Dol Do_2 octavă

Intervalele orânduite în armonie progresivă descrescătoare sunt:

Octavă	Cvintă	Cvartă	Terță majoră	Sextă majoră	Terță minoră	Sextă minoră
1/2	2/3	3/4	4/5	3/5	5/6	5/8

Intervalele de cvintă, de terţă majoră şi de terţă minoră produc acordurile cele mai armonioase, care sunt numite:

Acord major perfect	Do	Mi	Sol
	Sol	Si	Re
	Fa	La	Do
	Mi	$Sol^\#$	Si
Acord perfect minor	Do	Mi^b	Sol
	Fa	Sol^b	Do
	Re	Fa	La
	Mi	Sol	Si

Vedem că acordul perfect major este compus din: o terţă majoră (ca Do Mi) şi o terţă minoră (Mi Sol) sau (este acelaşi lucru) o cvintă (Do sol) şi o terţă majoră (Do Mi).

Şi că acordul perfect minor se compune din: o terţă minoră (Do Mi^b sau Re Fa) şi o terţă majoră (Mi^b Sol sau Fa La), sau o cvintă (Do Sol sau Fa Do) şi o terţă minoră (Do Mi^b sau Re Fa).

Putem scoate gama majoră din trei acorduri majore perfecte ca în gama următoare:

Do Re Mi Fa Sol La Si Do Re

Tot astfel, putem scoate o gamă minoră din acordurile perfecte minore. Să ne întoarcem la şirul armonicelor lui Do... Am văzut că în timp ce primele şase armonice rămâneau în gama majoră sau a lui Zarlin, armonica şapte cădea în afara acestei game (între $La_3^{\#}$ şi $Si_3^{\flat}$) şi era identificată cu $Si_3^{\flat}$.

Iată şirul armonicelor după a zecea armonică:

Frecvenţa	11	12	14	15	16	18	20	24	25	30
	$Fa_4^{\#}$	Sol_4	$Si_4^{\flat}$	Si_4	Do_5	Re_5	Mi_5	Sol_5	$Sol_5^{\#}$	Si_5

Tot aşa cum armonicele 4-5-6 (Do-Mi-Sol) furnizează acordul major, armonicele 10-12-15 (Mi-Sol-Si) furnizează acordul acordul perfect minor.

5-6-8 sau 12-15-20 furnizează acordul de terţă şi de sextă.

6-8-10 sau 15-20-25, acordul de cvartă şi de sixtă. Dacă adăugăm acordului perfect major o terţă minoră obţinem acordul de *septimă* cum este Sol Si Re Fa.

Sol Si Re este numit acord major perfect cu dominantă, deoarece în gama Do, Sol este numită dominantă.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
tonică	super-tonică	mediantă	subdo-minantă	domi-nantă	subme-diantă	sensibilă

Dacă adăugăm acordului perfect major două terţe minore, obţinem acordul de nonă minoră, Sol, Si, Re, Fa, $La^{\flat}$ este acordul de nonă minoră cu dominantă. (Dacă, dimpotrivă, adăugăm acordului de septimă o terţă majoră obţinem acordul de nonă majoră Sol Si Re Fa La). Dacă reprezentăm prin M terţa majoră şi prin m terţa minoră,

Sol Si Re Fa

M m m

acordul de septimă cu dominanta este acelaşi dacă trecem de la gama majoră la gama minoră armonică. (Dimpotrivă, acordurile de nonă cu dominantă diferă: Sol Si Re Fa La în Do major, Sol Si Re Fa $La^{\flat}$ în Do minor).

Muzicologii nu sunt de acord asupra chestiunii de a şti dacă notele gamei, determinate de frecvenţele şi gamele asociate acestor note, au valori estetice absolute, caracteristici invariante. în ceea ce priveşte intervalele şi acordurile răspunsul este afirmativ. Referitor la gamele

care au anumite note drept tonică, muzicienii şi-au spus uneori părerea. De pildă:

Pentru Beethoven tonalitatea Si^{b} minor este „Tonalitatea neagră”.

Tonalitatea Re^{b} major este maiestuoasă, cea de Do major este puternică şi bărbătească.

Pentru alţii:

Gama în Do major inspiră bărbăţie.

Gama în Re^{b} major - sonoritate deplină, euforie.

Gama Mi major - splendoare, veselie.

Gama Fa major - pace, bucurie, lumină.

Gama Fa minor - melancolie dureroasă.

Gama Fa$^{\#}$ major este strălucitoare şi limpede.

Gama Sol^{b} major evocă iubirea, bogăţia.

Gama Mi minor - necaz, doliu, elegie.

Gama La minor - tristeţe, plânset.

Gama Si minor - sentimentalitsm.

Pentru Haydn:

Gama Fa major sugerează o idilă pastorală.

Gama Fa$^{\#}$ major este gama *transcendentă* (aminteşte cerul).

Gama Fa minor şi Fa$^{\#}$ minor sunt tragice.

Gama Sol minor evocă gelozia.

Oricine poate compara acţiunea sugestivă sau emotivă a diferitelor game punând să i se cânte la pian aceeaşi melodie în 24 de game posibile (12 majore şi 12 minore); contrar teoriei după care gamele ce au aceleaşi intervale ar trebui să fie din punct de vedere muzical identice, impresiile primite vor fi diferite de la o gamă la alta. Este adevărat că e vorba de emoţii, de reacţii psihologice; puriştii declară că emoţia nu are ce căuta în aprecierea muzicii.

Referitor la notele individuale este, în general, admis, suntem şi noi de acord, că însemnătate au raporturile de la o notă la alta, intervalele şi nu valorile absolute ale notelor, şi totuşi practica nu este întotdeauna de acord cu logica; observăm de pildă că nota Re de la vioară atrage ţânţarii şi că nota Mi$^{\#}$ provoacă rutul pisicilor. După părerea unui critic muzical englez, nota Sol din octava feminină stimulează cel mai mult sentimentul iubirii la bărbat. Chinezii numeau nota *Kung* (Fa de la noi) „nota Universului”. Aceste contradicţii au fost explicate prin asimetria relativă a organelor acustice omeneşti şi prin jocul subtil al timbrurilor şi al armonicilor.

Să ne întoarcem la acorduri: cele două acorduri perfecte (major şi minor) nu conţin decât *consonanţe* (terţe şi sexte); septimele şi secundele, precum şi toate intervalele mărite sau micşorate cu un semiton sunt, din punct de vedere tehnic, disonanţe. Un exemplu faimos de disonanţă este tritonul sau cvarta mărită (3 tonuri în loc de două şi jumătate, Fa Si sau Do Fa$^{\#}$ în loc de Do Fa), *Diabolus in Musica*

al înaintaşilor noştri. A fost sinistrul semnal de alarmă urlat de sirene în timpul Blitzului de la Londra.

Mai există un mod de a compune o gamă care se apropie de gama majoră, folosind procedeul lui Platon din Timaios, cel al rebusului din „Numărul sufletului Lumii". Este vorba de gama mediilor sau a medietăţilor. Procedeul este înrudit cu mânuirea proporţiilor în arte în general, aşa cum a fost practicată de arhitecţii greci şi de artiştii-matematicieni din vremea Renaşterii timpurii, chiar de Palladio. împărţim mai întâi după media aritmetică sau cea armonică (intercalăm aceste două „medietăţi"), apoi tratăm în acelaşi fel intervalele cuprinse între aceste medii tonica şi octava tonicii. Obţinem astfel toate intervalele din gama majoră, numai că 16/15 şi 15/8 sunt înlocuite cu 17/16, 18/17, 17/9 şi 16/9 (în octavă am obţinut cvinta 3/2 drept medie aritmetică şi cvarta 4/3 drept medie armonică; cu cvinta (1 şi 3/2) obţinem terţa majoră 5/4 şi terţa minoră 6/5 etc.).

Din punct de vedere „atmosferic", cele 3 acorduri majore derivate din gama Do major, de exemplu, sunt acordul Do Mi Sol care exprimă bucuria, fericirea, seninătatea, acordul perfect cu dominantă Sol Si Re şi acordul cu subdominanta Fa La Do care dă o calitate delicată pasajelor în care intervine (sunt cele 3 acorduri, care furnizează întreaga gama majoră diatonică).

Acordul perfect minor Do Mi^{b} Sol oscilează între melancolie şi tragedie. (Amintim că există trei game minore.) Triada micşorată Do Mi^{b} Sol^{b} este acordul minor perfect coborât cu un semiton, sau acordul furtunos. Acest acord şi triada mărită (Do, Mi Sol$^{\#}$) sunt „neliniştite" şi agitate, cel dintâi în mod deosebit sugerând efecte sinistre, urletul vântului, apropierea unei furtuni, toate acestea din pricina absenţei seninei cvinte perfecte; triada mărită este fantastică şi „rătăcitoare" (cheia din *Ucenicul Vrăjitor*). însă pentru a crea astfel de atmosfere este folosită îndeosebi septima micşorată (Si Re Fa La^{b}, 3 terţe minore).

Putem spune că acordul de septimă cu dominantă (Sol Si Re Fa) este acordul cel mai apreciat şi mai important în muzică, în cele două tonalităţi majoră şi minoră, specific mai ales cântecelor populare. Este şi el, ca şi acordul major perfect, un acord al naturii, auzit în toate tonurile naturale din cauza armonicelor sale simple (pentru acordul perfect 4, 5, 6, pentru acordul de septimă cu dominantă armonicele 4, 5, 6, 7).

Cel mai des folosit dintre acordurile de nonă este acordul de nonă cu dominantă (Sol Si Re Fa La şi Sol Si Re Fa La^{b}), care se termină în terţă majoră şi respectiv minoră (M m m M şi M m m m), care prezintă armonicele 4, 5, 6, 7, 9. Este o versiune bogat împodobită şi mai armonioasă a acordului de septimă cu dominantă.

Privitor la muzica tonală normală, o tonică este întotdeauna subînţeleasă, însă ea se poate schimba de mai multe ori în aceeaşi bucată muzicală, în timpul modulaţiilor. O melodie nu are sens dacă nu se află în relaţie cu o tonică şi o gamă sau cu o succesiune de tonice şi de game.

O melodie sau linie melodică determinată de raporturile dintre înălţimile notelor poate consta într-o succesiune în timp de note izolate. Dar, în general, orice notă din această linie melodică este reprezentată de un acord sau de o combinaţie mai mult sau mai puţin complicată de acorduri. Şi în acest caz tot nota cea mai înaltă de pe partitură le poate înlocui pe celelalte sau, cu alte cuvinte, orice partitură, oricât de complicată şi de bogată în note ar fi, poate fi înlocuită din punctul de vedere al liniei sale melodice de succesiunea notelor înalte. Aceasta nu se aplică firesc decât compoziţiilor muzicale în care linia melodică există şi nu muzicii dodecafonice etc.

E. Souriau a formulat axioma următoare privitor la linia melodică:

Pentru orice compoziţie muzicală ne putem închipui o notaţie în spaţiu, o curbă, care să dea simultan socoteală de ansamblul bucăţii, de ritmul şi de linia sa melodică.

E. Souriau a stabilit chiar formula în geometrie analitică a acestei curbe, a cărei ordonată va fi $y = 12 \log_2 n \times 16/435$, dacă n este frecvenţa vibraţiei sonore. Numărul y trebuie să fie transpus în notaţia în bază 12 (în care 10 = 12); 60 reprezintă nota La din octava a şasea, cu 870 de vibraţii.

Tot aşa cum succesiunea în timp a notelor caracteristice ne dă linia melodică sau melodia, tot astfel acordurile de 3 sau 4 note simultane alcătuiesc armonia. Să remarcăm că pentru muzician acordul (Do Mi Sol sau altul) este realizat atât când notele sunt cântate simultan (acordul propriu-zis), cât şi atunci când ele sună succesiv în arpegiu.

Întrucât în partiturile normale muzica este scrisă, în general, în 4 părţi simultane, acordurile de 3 note sunt mărite la 4, repetându-se una dintre notele acordului, adesea cea mai joasă.

Cititorul a remarcat deja că putem lua orice notă din gamă drept tonică sau joasă, cu condiţia ca intervalele dintre note să rămână aceleaşi în fiecare gamă, majoră sau respectiv minoră. Prima gamă minoră fiind gamă normală în Do:

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
	T	T	t	T	T	T	t

iar prima gamă minoră gama fără alteraţii în La:

La	Si	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La
	T	t	T	T	t	T	T

Putem astfel forma 16 game majore (dintre care 7 diezate şi 7 bemolizate) şi 16 game minore prezentate în mod condensat în tabelul VI din planşa XXIII (în realitate gama în Do major şi gama în La nealterată apare fiecare de două ori în tabel). în cazul celor 7 game majore diezate (cu diezi la cheie, de la 1 la 7) urcăm de fiecare dată cu un semiton (diezăm) a şaptea notă după ce am luat drept tonică cvinta gamei din linia precedentă, în cazul celor 7 game majore bemolizate (care are între 1 şi 7 bemoli la cheie) coborâm de fiecare dată cu un semiton (bemolizăm) a patra notă după ce am luat drept tonică cvarta din linia precedentă. În cazul gamelor minore diezate (a căror primă linie este gama în La nealterată) luăm drept tonică cvinta din gama precedentă urcând cu un semiton (diezând) nota a doua; în cazul gamelor minore bemolizate luăm drept tonică cvarta din linia precedentă bemolizând nota a şasea.

Când folosim gamele temperate ale pianului normal nu rămân decât 12 game majore şi 12 game minore, din pricina contracţiilor.

$Si = Do^{b}$	$Fa^{\#} = Sol^{b}$	$Do^{\#} = Re^{b}$	
$Re^{\#} = Mi^{b}$	$La^{\#} = Si^{b}$	$Sol^{\#} = La^{b}$	
$Mi^{\#} = Fa$	$Fa^{b} = Mi$	$Si^{\#} = Do$	$Do^{b} = Si$

În acest tablou, gamele minore sunt gamele minore clasice care nu au nici o notă „sensibilă” (ele sfârşesc cu un ton întreg). în practică, muzica modernă foloseşte gama minoră zisă armonică, în care se diezează nota a şaptea din gama clasică minoră corespunzătoare (de asemenea, tonică).

Exemplu:

gama minoră clasică Do Re Mi^{b} Fa Sol La^{b} Si^{b} Do

gama minoră armonică Do Re Mi^{b} Fa Sol La^{b} Si Do

Pe portativele unei partituri natura unei game este marcată simplu trecându-se imediat după cheie (simbolul : sau C: cheia Sol sau cheia Fa, care aşează notele pe portativ) toate „accidentele” (alteraţiile, # sau b) conţinute în această gamă.

Modulaţia este tehnica ce permite să se treacă treptat într-o bucată de la o tonică la alta folosind, de pildă, o notă sau chiar un acord comun celor două game: ea se mai poate obţine alterând (diezând sau bemolizând) o notă. în general, modulaţiile se fac prin game, „înrudite", de pildă de la Do major la Sol major (de la tonică la dominantă). Fiecare gamă are cinci game înrudite; trecerea se termină, în general, printr-un acord care poate aparţine şi gamei următoare

TABLEAU III
GAMMES MAJEURES
GAMMES MINEURES
Do Ré Mi Fa Sol La Si Do
Sol La Si Do Ré Mi Fa# Sol
Ré Mi Fa# Sol La Si Do# Ré
Do Ré Mi Fa Sol La Si Do
Fa Sol La Si♭ Do Ré Mi
Si♭ Do Ré Mi♭ Fa Sol La Si♭
La Si Do Ré Mi Fa Sol La
Mi Fa# Sol La Si Do Ré Mi
Si Do# Ré Mi Fa# Sol La Si
Fa#
Do#
Sol#
Ré#
La# Si# Do# Ré# Mi# Fa# Sol# La#
La Si Do Ré Mi Fa Sol La
Ré Mi Fa Sol La Si♭ Do Ré
Sol La Si♭ Do Ré Mi♭ Fa Sol
Do
Fa
Si♭
Mi♭
La♭ Si♭ Do Ré♭ Mi♭ Fa Sol♭ La♭
De 1 à 7 altérations (# dièses ou ♭ bémols à la clef).

PLANȘA XXIII

În general, printr-un acord care poate aparţine şi gamei următoare (înrudită), de cele mai multe ori acordul de septimă cu dominantă.

Aceste modulaţii prin game înrudite sunt asemănătoare cu regula neamestecului temelor în combinaţia euritmică a proporţiilor în cazul artelor spaţiului şi se acordă, de asemenea, cu principiul analogiei al lui Thiersch. Dacă socotim linia melodică verticală, atunci acordurile simultane sunt secţiuni orizontale în bucata muzicală (în vreme ce succesiunea notelor celor mai înalte în fiecare acord dă linia melodică) care constituie armonia propriu-zisă, oglindire a combinaţiei simultane a notelor. Atunci când aceste acorduri sunt alcătuite din notele simultane din două sau mai multe melodii, avem contrapunctul, alt aspect al simultanietăţii. În Evul Mediu polifonia

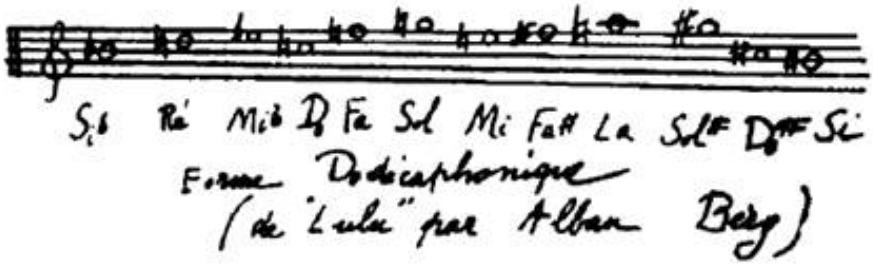
însemna combinaţia simplă a două sau trei melodii armonios acordate; ea trebuia să ducă la armonie şi la contrapunct. Politonalitatea caracterizează o compoziţie în care, pentru a trece de la o tonalitate la alta, se foloseşte mişcarea simultană a mai multor tonalităţi distincte; în „monodie" melodia este scrisă într-o singură linie melodică predominantă; omofonia are acelaşi înţeles.

Încercând să scape de tonalitatea armonios reglată care se impusese în secolul al XlX-lea compozitorii moderni au căutat mai multe inovaţii. Gama cu tonuri întregi, de care s-a folosit uneori Debussy înlătură semitonurile şi prin urmare asimetria, dinamismul moştenite de la gama diatonică a lui Pythagoras (a se vedea planşa XXII).

Ca urmare, caracteristicile gamelor cu tonuri întregi sunt o impresie plăcută câteodată de „melancolie" cu monotonia care, dimpotrivă, rezultă din însuşi principiul său.

Revolta cea mai însemnată împotriva sistemului tonal a fost introducerea atonalităţii absolute de Amold Schonberg şi şcoala sa (Alban Berg), cu gama cu 12 note, „dodecafonică". Aici compozitorul întrebuinţează 12 note din gama cromatică (temperată) aranjate arbitrar într-o ordine specifică folosită mai apoi ca bază de referinţă pentru o compoziţie dată. Acest grup de note, care nu constituie o gamă şi nu are tonică, poate fi inversat şi întors în aşa fel încât să dea patru forme înrudite; aceste patru forme şi cele 12 transpuneri ale lor (48 cu totul) sunt forme la fel de valide din grupul de 12 note. Fiecare fază a compunerii se raportează la acest grup. Gama cromatică cu 12 tonuri obişnuite nu este o gamă dodecafonică, ci o gamă cu 7 note, „colorată" pe ici, pe colo. Acorduri normale şi fragmente cu tonuri întregi sunt amestecate câteodată cu substratul atonal; în general, rezultatul are un efect neplăcut asupra urechilor auditorilor obişnuiţi cu tonalitatea, impresia fiind de mişcare browniană haotică, de sunete lipsite de ritm şi de melodie, de succesiune de zgomote. Dar poate că ar fi prematur să condamnăm în bloc sistemul atonal, cu toate că pare să aibă ca rezultat mai degrabă exerciţii matematice arbitrare decât compoziţii muzicale. Să ne amintim că Wagner a fost huiduit, că Richard Strauss şi Debussy au fost socotiţi disonanţi. Iar muzica chinezească, cea care farmecă 450.000.000 de perechi de urechi, ni se pare tot atât de cacofonică precum anumite opere atonale.

Muzicienii care nu au repudiat legile tonalităţii admit totuşi că gamele clasice au nevoie să fie reînnoite; Florent Schmitt de pildă, este de părere că trebuie introdusă terţa de ton „înviorând cu şase sunete pure biata noastră gamă sleită, vlăguită... ceea ce ar face să ţâşnească sistemul nostru armonic în jerbe răcoritoare".



Ivan Semenov recomandă şi el introducerea terţei de ton. „Forma" dodecafonică nu este o gamă, ci o suită primară ale cărei inversiuni şi alte mânuiri sunt suite secundare. Ele sunt, în general, cu neputinţă de cântat sau de reţinut... Dau aici un exemplu dintr-o suită dodecafonică din opera *Lulu* de Alban Berg.

Cu aceasta închei capitolul despre număr în muzică; sper că nu am pus la grea încercare răbdarea matematicienilor vorbind prea mult despre muzică şi pe cea a muzicienilor căutând să dovedesc temeiul afirmaţiei lui Leibniz, nădăjduiesc în orice caz că, mergând pe această cale limitrofă celor două domenii, numărul şi muzica, tot zâmbetul din depărtări al lui Pythagoras este cel care ne călăuzeşte cuvintele:

„El însuşi a spus-o"

ale neofiţilor îmbrăcaţi în togă de in alb din Marea Confrerie.

Unii cititori se vor întreba dacă „Numărul de aur" atât de vădit în artele vizuale, apare sau nu în muzică; nu l-am găsit în acest capitol, în afară de rolul dominant al cvintei şi de apariţia intermitentă a fracţiilor fibonacciene în intervalele gamei. Totuşi, anumite compoziţii ale lui Beethoven şi ale lui Mozart au, se pare, numărul măsurilor tăiate în segmente care reproduc în timp proporţia din Secţiunea de Aur. Iar proporţia geometrică, care nu se înfăţişează cu limpezime în gama diatonică şi în gamele majoră şi minoră obişnuite, domneşte, dimpotrivă, cu autoritate în gama temperată, producând, după cum am văzut, semitonuri după o proporţie geometrică cu raţia $\sqrt[12]{2}$ care împarte octava în 12 părţi egale.

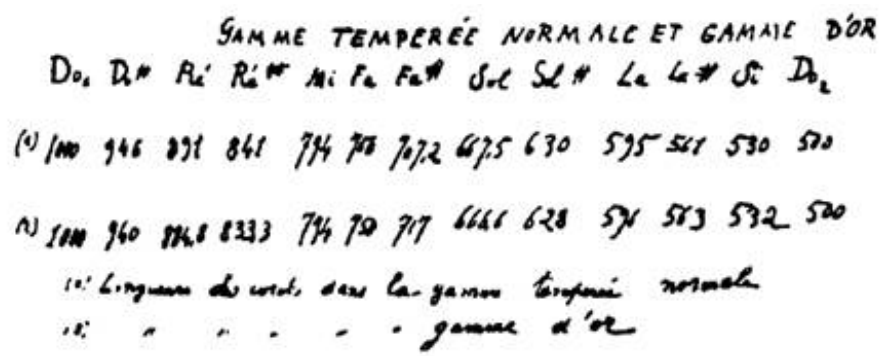
În legătură cu aceasta, un filosof, estetician şi muzicolog elveţian, M. Denéréaz de la Universitatea din Lausanne, examinând mai îndeaproape diviziunile proporţionale ale gamei temperate, a remarcat că toate notele unei game cu temperare egală se puteau obţine (începând cu acordul perfect Do Mi Sol) prin folosirea Secţiunii de Aur sau, după cum singur spune, „că temperarea egală introduce Secţiunea de Aur în proporţiile gamei". într-adevăr, a tempera notele Mi şi Sol pe o coardă Do lungă de 1000 mm, de pildă, înseamnă (plecând de la gama majoră în care părţilor alicote 4/5 şi 2/3 le corespund corzile Mi 800 şi sol 666,6...) să deplasezi punctele care marchează aceste note în aşa fel încât complementele corzilor Mi şi Sol să devină, în loc de

200 şi 333,3 ... 206 şi 333. Într-adevăr lungimea corzii Mi, raportată la Do, va fi inversul raportului frecvenţelor, inversul terţei majore temperate 1,259 sau 1/1,259 = 0,794 care dă exact 206 pentru coarda complementară; lungimea corzii Sol temperată este dată de inversul cvintei temperate 1,498 sau 1/1,498 = 0,667 ceea ce înseamnă 667 pentru coarda sol şi 333 pentru complement. Înmulţind cele două complemente 206 şi 333 cu 3 obţinem

618 si 999, aproximaţii riguroase de $\frac{1}{\emptyset}$, şi de 1. M.

Denéréaz îşi comentează descoperirea cu acest cuvinte:

„Dacă acordul perfect Do Mi Sol mi se pare armonios în mod spontan, aceasta nu se întâmplă din pricina unui raport simplu între segmentele de coardă care îl exprimă, ci pentru că terţa minoră Mi Sol este pentru terţa majoră Do Mi cum este aceasta faţă de cvinta Sol, Do Sol" (Chiar definiţia proporţiei din Secţiunea de Aur). M. Denereaz arată mai departe, luând notele Do_1, Fa_1, Sol_1, Do_2 ca repere fixe, că se poate deduce de aici întreaga gamă temperată folosindu-ne doar de Secţiunea de Aur aplicată la lungimile corzilor (de la 1000 la 500) în octavă sau la cele ale complementelor lor la 1000. Obţinem astfel cele 7 Secţiuni de Aur Do Mi Sol, Do Fa La Re Fa Sol, Fa Sol Si (înmulţind cu 0,618 intervalele Re Sol şi Fa Si), Re Fa Si, Re Sol Si, Fa La Do. Diezii confundaţi în general cu bemolii, întrucât este vorba de o gamă cu temperare egală, se intercalează în medietăţi geometrice se furnizează şiruri de aur şi reciprocităţi adiţionale. Toate acestea, spune Denéréaz, oferă o nouă interpretare a unităţii estetice a gamei pe care o lămuresc atât de puţin raporturile eterogene luate în mod obişnuit în considerare.


GAMME TEMPERÉE NORMALE ET GAMME D'OR
Do Do# Ré Ré# Mi Fa Fa# Sol Sol# La La# Si Do
(1) 1000 946 891 841 794 750 707,2 667,5 630 595 561 530 500
(2) 1000 940 884,8 833,3 784 739 717 666,6 628 591 583 532 500
1° Longueur des cordes dans la gamme tempérée normale
2° " " " " " gamme d'or

Calculând corzile gamei temperate prin aplicarea riguroasă a Secţiunii de Aur în conformitate cu indicaţiile de mai sus obţinem ceea ce Denéréaz numeşte „Gama de Aur". Ea se deosebeşte foarte puţin de gama temperată uzuală.

Lungimile comparate ale corzilor

Rândul al doilea reprezintă lungimile corzilor în gama temperată uzuală, rândul al treilea lungimile corespunzătoare din „Gama de Aur“.

Putem constitui Gama de Aur plecând de la frecvenţele celor patru note fixe: $Do_1 = 1$, $Fa_1 = 1{,}333$, $Sol_1 = 1{,}500$ $Do_2 = 2$[77].

Ar fi fără îndoială interesant să acordăm un pian după Gama de Aur a lui Denéréaz pentru a-i compara sonorităţile cu cele ale gamei temperate uzuale şi pentru a verifica dacă jocul subtil al propoziţiilor de aur introduse de teorie se traduce în câştiguri armonice, ecouri ale „Numărului sufletului lumii“.

Îmi exprim încă o dată speranţa că exemplele şi consideraţiile cuprinse în acest capitol au confirmat temeiul butadei lui Leibniz şi al celei a lui Francis Warrain (după care muzica este pentru timp ceea ce geometria este pentru spaţiu, cu alte cuvinte, desenul în timp). Ba chiar putem îndrăzni să spunem, împreună cu un anumit grup de esteticieni muzicologi, că „sunetul muzical califică nemijlocit însă esenţa duratei şi ne îngăduie câteodată să *trăim spiritual Numărul”*.

CAPITOLUL XVIII

NUMĂRUL ŞI CHIMIA-CHIMIA ANORGANICĂ ŞI CHIMIA ORGANICĂ-TABELUL LUI MENDELEEV ŞI TABELUL LUI MENDEL-TEORIA LUI SCHRCEDINGER DESPRE MUTAŢII-NUMĂRUL ŞI UNDELE

Matematica este poarta şi cheia ştiinţelor naturale, alfabetul filosofiei.
Francis BACON

Am studiat în capitolele precedente „Numărul în sine", pur sau ştiinţific, cu reprezentanţii săi excentrici, numerele imaginare şi transfinite; am văzut în treacăt rolul său în frumuseţea operelor de artă şi a formelor naturale în care apare, în general, sub forma proporţiei, adică a analogiei, precum şi rolul său în poezie, în muzică.

Analiza combinatorie întemeiată pe Triunghiul lui Pascal şi pe numerele figurate ne-a făcut să pătrundem în lumile cu 4 sau n dimensiuni, am enunţat în mecanica generală şi în fizica matematică legea fizică şi chiar fizico-chimică cea mai generală, legea absolută (pentru sistemele fizico-chimice închise şi care nu conţin organisme vii), lege deseori numită „a doua lege a termodinamicii" sau principiul lui Camot-Clausius, numit şi mai general „principiul minimei acţiuni". Ne rămâne să explorăm în treacăt un domeniu în care numărul ocupă, de asemenea, un loc de prim plan, chimia, născută şi ea în vechiul „pământ negru" al Egiptului, care, după ce a luat parte la visările simbolice ale alchimiştilor, a devenit o ştiinţă tot atât de riguroasă ca mecanica, şi în care aritmetica şi geometria ne ajută să alcătuim edificiile stereo-chimiei şi să pătrundem în inima atomului.

De când ipoteza atomică a materiei a fost formulată de greci şi de Lucreţiu (ipoteza că materia este în ultimă instanţă alcătuită din particule indivizibile şi indestructibile), părea probabil că într-o bună zi chimia va deveni o ştiinţă precisă şi va căpăta un aspect numeric, în care grupuri sau şiruri de numere întregi vor juca un anume rol. Teoria cinetică a gazelor în care căldura era interpretată ca o formă de energie rezultând din mişcările oscilatorii ultrarapide ale atomilor şi moleculelor în veşnică vibraţie, căldura sau mai degrabă temperatura, fiind proporţională cu frecvenţa acestor vibraţii, a introdus nu numai numerele, ci şi „numerele mari" ale concepţiilor „statistice".

Fizica şi chimia moderne confirmaseră în parte ipotezele atomice; se descoperiseră într-adevăr particule foarte mici, dar finite, indivizibile şi indestructibile în aparenţă, cu masa invariabilă, după cum se credea, care caracterizau pe fiecare din cele 92 de elemente simple clasificate datorită tabelului lui Mendeleev. Cele mai multe

dintre aceste corpuri simple aveau, în general, ca particulă caracteristică atomul corespunzător, însă uneori această particulă era compusă din doi atomi, era o moleculă (ca în cazul hidrogenului şi al oxigenului).

În tabelul periodic al lui Mendeleev corpurile simple sunt clasate după ceea ce numim „numerele lor atomice" de la 1 la 92; aceste numere nu sunt exact proporţionale cu greutăţile atomice (unitatea fiind aici a 16-a parte din greutatea atomului de oxigen, care are, aşadar, greutatea atomică 16), însă cresc paralel cu acesta. Greutăţile atomice, dintr-un motiv pe care-1 vom vedea mai departe, nu sunt, în general, numere întregi. Proût şi A. Strindberg (dramaturgul) au postulat că atomul de hidrogen este elementul de bază care permite reconstituirea tuturor corpurilor zise simple (şi alchimiştii au crezut în unitatea materiei şi în posibilitatea transmutaţiilor). Proût şi Strindberg întrevăzuseră adevărul, însă felul în care atomii celor 92 de elemente simple erau legaţi de atomul de hidrogen era ceva mai subtil decât o simplă adunare de atomi identici; lumea „subatomică" sau infraatomică intră în joc şi, pentru a înţelege structura materiei cândva indivizibile şi indestructibile, trebuia să pătrunzi în interiorul atomului, chiar al celui dintâi, al celui mai uşor, cel de hidrogen.

Descrierea atomului acceptată de fizico-chimia de astăzi este următoarea:

Fiecare atom al unui element simplu este alcătuit dintr-un nucleu şi dintr-un strat exterior de învelişuri ideale concentrice care conţin orbitele electronilor. Aceste straturi exterioare pot conţine de la un electron (o orbită) la până la 92 de electroni, hidrogenul nu are decât un electron exterior, heliul doi. Primul înveliş din stratul exterior nu conţine niciodată mai mult de doi electroni, al doilea mai mult de opt, al treilea mai mult de 18, al patrulea mai mult de 32 de electroni (uraniul are 92 de electroni ale căror orbite ocupă 7 învelişuri concentrice, dintre care doar primele 4 sunt naturale; cu 2, 8, 18, 32 electroni aceste numere se conformează formulei $2n^2$, în care n este numărul de ordine al învelişului de la 1 la 4).

Nucleul conţine un număr de protoni (particule cu sarcină electrică pozitivă egală în valoare absolută cu sarcina negativă a electronului, dar cu o masă de 1840 de ori mai mare decât aceea a electronului) egal cu cel al electronilor de pe învelişul exterior, întrucât sarcinile pozitive se compensează, atomul este din punct de vedere electric neutru. În plus, nucleul conţine un număr de neutroni fără sarcină electrică, însă cu masa egală cu cea a protonului (mai exact, dacă masa electronului este 0,0005, cea a protonului este 1,0076, iar cea a neutronului 1,0089). Ceea ce numim numărul atomic este egal cu numărul de electroni de pe învelişurile exterioare care gravitează în jurul nucleului; suma maselor protonilor şi a neutronilor

din nucleu dă *greutatea* atomică.

De exemplu, oxigenul are numărul atomic 8; aluminiul 13, greutatea atomică 27,1; aurul are numărul atomic 79, greutatea atomică 197,2; uraniul are numărul atomic 92 (este ultimul corp simplu „natural"), greutatea atomică 238,5.

Constatarea, surprinzătoare la prima vedere, că greutăţile atomice nu sunt în general numere întregi, provine din faptul că cea mai mare parte a elementelor au mai multe feluri de atomi cu greutăţi atomice întregi uşor diferite numiţi izotopi (cu acelaşi număr atomic); diferenţele provin din faptul că, deşi au toţi acelaşi număr de electroni exteriori şi de protoni nucleari, numărul neutronilor nucleari diferă, fapt care duce la existenţa unor fluctuaţii ale diferitelor greutăţi atomice; elementul compus, deşi element pur în teorie (cuprinzând numai atomi ai aceluiaşi element) are greutatea atomică egală cu media proporţională a greutăţilor atomice ale izotopilor care îl compun. Se ştie de pildă că uraniul, cu numărul atomic 92 şi greutatea atomică 238,5, are ca izotopi principali greutăţile atomice 238 (92 de protoni +146 de neutroni în nucleu) şi 235 (92 de protoni + 143 de neutroni). Argonul, care are numărul atomic 18, are 2 izotopi cu greutăţile atomice 36 şi 40. Primul are 18 neutroni nucleari, al doilea 22,însă, din pricina proporţiilor diferite, greutatea atomică este 39,9.

Tabelul din planşa XXIV va uşura înţelegerea dispunerilor succesive ale atomilor în Tabelul lui Mendeleev.

Vedem că îndată ce al doilea înveliş exterior a captat 8 electroni, învelişul următor începe cu un electron. Atomii cu 8 şi 18 electroni în învelişul exterior sunt saturaţi (2×2^2, 2×3^2) şi furnizează în special gazele inerte, neonul şi argonul; în acest şir care are ca strămoş heliul cu 2 electroni exteriori urmează şi kriptonul (36 de electroni) şi xenonul ($54 = 2 \times 3^3$) cu numerele, de asemenea, satisfăcute, dacă nu saturate.

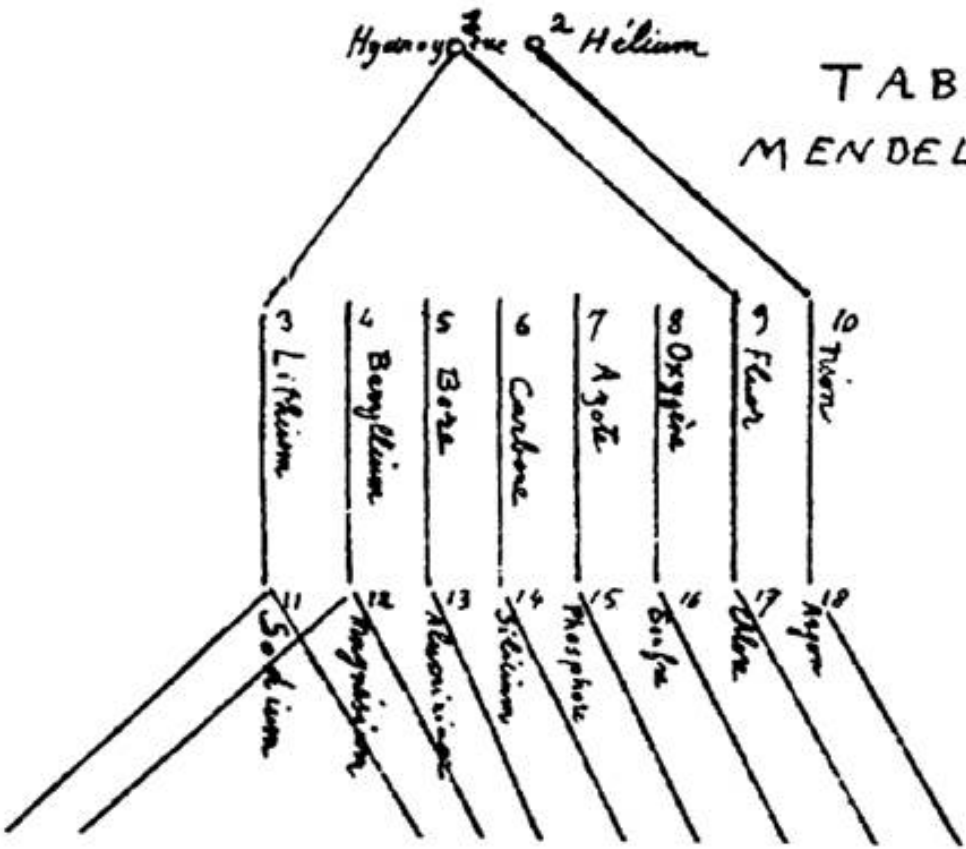
În tabelul din planşa XXIV vedem că atomii cu acelaşi caracter, care au aceleaşi simetrii sau asimetrii în dispunerea electronilor pe învelişuri, sunt grupaţi aproximativ în coloane verticale ale căror elemente au aceleaşi proprietăţi generale. Este cazul gazelor inerte pomenite mai înainte care au o mare stabilitate şi nici o tendinţă de a se combina cu alte elemente. Elementele care nu au decât un electron pe învelişul exterior sunt instabile şi au tendinţa de a se combina cu un alt element care „vrea" să acapareze acest electron foarte mobil. în general, numerele pare tind către stabilitate, numerele impare către instabilitate sau cel puţin au tendinţa de a se alia cu un alt element. Corpurile uşoare care nu au decât 2 sau 3 învelişuri de electroni au tot timpul tendinţa de a-şi completa învelişul exterior până la 8 electroni; pierzând sau captând numărul de electroni suficienţi. Clorul, de pildă, care are 7 electroni exteriori şi sodiul (cu 1 electron exterior) se

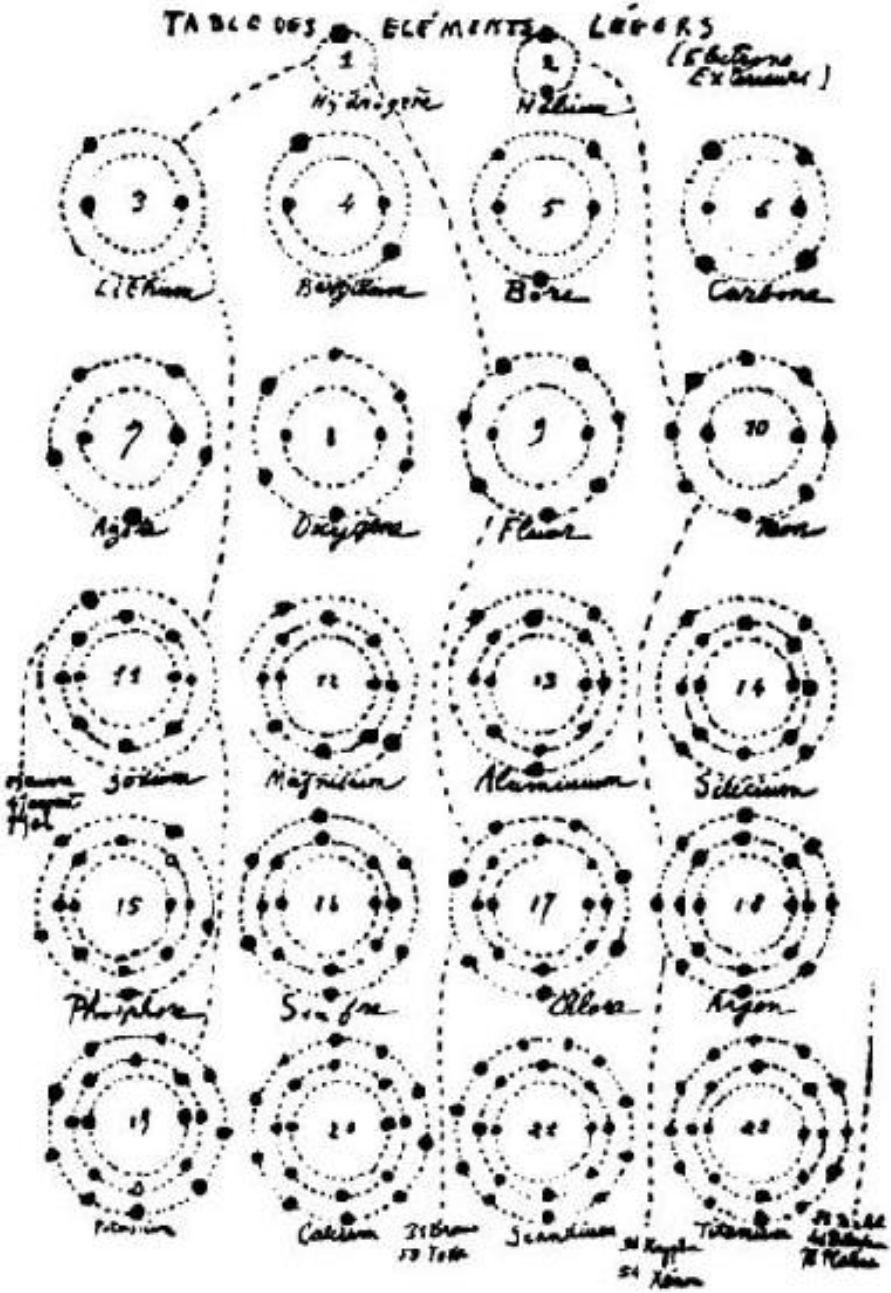
combină pentru a forma sarea sau clorura de sodiu, NaCI (planşa XXV).

Atomul de sodiu îşi pierde electronul exterior şi capătă o sarcină pozitivă, devine un ion de sodiu. în acelaşi timp, atomul de clor capătă un electron (îşi completează învelişul exterior de 8 electroni) şi dobândeşte o sarcină negativă, devine un ion negativ. Aceşti 2 ioni cu sarcină contrară se combină într-o moleculă, un cristal elementar, de sare, în care atomii ocupă la rândul lor vârfurile şi centrul unui cub, precum şi vârfurile cuboectaedrului înscris în cub formând astfel cristalul clasic din sistemul cuboctaedric (planşa VI cap. VI).

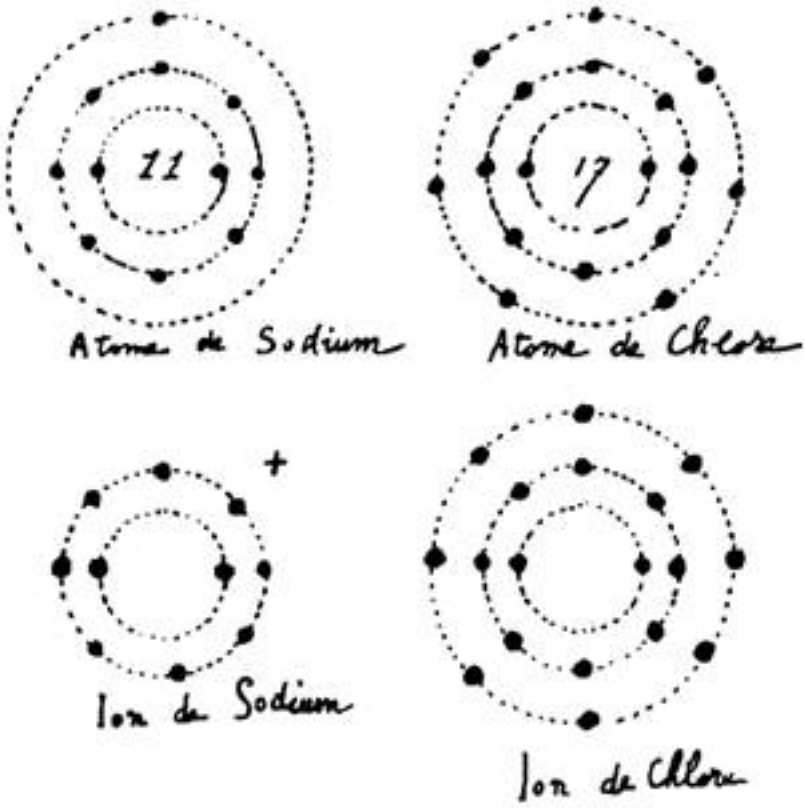
Am văzut într-un alt capitol că reţeaua cuboctaedrică, care combină simetriile sistemelor cubic şi hexagonal, este cea care dă repartiţia cea mai izotopă de puncte în spaţiu. Aurul, argintul, arama, aluminiul au, în general, atomii dispuşi conform cu această reţea cuboctaedrică. Tendinţa aceasta cu 2 atomi sau molecule de a se combina, câştigând şi pierzând un electron, aparţine un fenomen numit electrovalenţă sau afinitate electronică.

TABLE DE MENDELEÏEF




TABLOU DES ELÉMENTS LÉGERS
(Électrons Extérieurs)
1
Hydrogène
2
Hélium
3
Lithium
4
Béryllium
5
Bore
6
Carbone
7
Azote
8
Oxygène
9
Fluor
10
Néon
11
Sodium
12
Magnésium
13
Aluminium
14
Silicium
15
Phosphore
16
Soufre
17
Chlore
18
Argon
19
Potassium
20
Calcium
21
Scandium
22

PLANȘA XXIV



PLANȘA XXV

PLANSA XXVI

Iată câteva detalii complementare despre calitatea periodicităţii Tabelului lui Mendeleev: coloana care are în frunte atomul de hidrogen (N = 1) şi care continuă cu sodiul (N = 11) şi potasiul (N = 19) are o a doua ramificaţie (începând cu sodiul), care cuprinde un şir de metale: cupru (29), argint (47), aur (79); o altă semicoloană independentă cu metale „nobile" înrudite dă: nichel (28), paladiu (46),

platină (78); o alta: beriliu (4), magneziu (12), zinc (30), cadmiu (48), mercur (80). Un alt rând: carbon (6), siliciu (14), germaniu (32), staniu (50), plumb (82). Coloana elementelor cu 7 electroni pe învelişul exterior (deci dornică să absoarbă al optulea electron) ne promite elemente instabile: fluorul (9) clorul (17), bromul (35), iodul (53). Am citat deja cloana gazelor inerte (cu învelişul exterior saturat): heliul (2), neonul (10), argonul (18), criptonul (36), xenonul (54). Această lege a octavelor nu este, după cum se vede, decât aproximativă, însă analogiile pe care le pune în lumină sunt totuşi folositoare, iar dispunerea numerică a electronilor pe învelişuri explică până lâ un anume punct cauzele (planşa XXVI, tabel ui 6).

A fost explorată până şi structura internă a nucleelor, structură care pare şi ea alcătuită din învelişuri pe care particulele, protoni şi neutroni, se învârtesc în jurul centrului pe nişte orbite fixate de legile mecanicii cuantice (mai corect, orbitele sunt „distribuţii de probabilitate"). Şi aici (pe orbitele intranucleare), anumite grupări par mai stabile decât celelalte. De pildă, până la calciu (20), elementele care conţin numere pare egale de protoni şi de neutroni, heliul (2), beri- liul (4), oxigenul (8),... calciul (20) sunt mai stabile decât celelalte. 20 pare un număr foarte favorabil stabilităţii, ceea ce pare să sugereze un înveliş saturat cu 20 de protoni; acelaşi lucru pentru 50 (staniu) şi 82 (plumb) care, asemeni calciului, oferă un mare număr de izotopi (numere variabile de neutroni). De fapt, din cauza acestei particularităţi, savanţii „intranucleari" au dat grupurilor 2, 8, 20, 50, 82 denumirile neaşteptate de „numere magice". Stabilitatea nucleelor constituite dintr-un număr „magic" de protoni sau de neutroni poate fi perturbată de prezenţa unei particule suplimentare, necuplate (care se prezintă întotdeauna cu un număr impar de particule nucleare). Când numărul de neutroni şi de protoni este par, „spinii" lor (rotire în jurul axei sau în jurul centrului nuclear) se compensează, însă atunci când o particulă impară (necuplată) există, ansamblul nucleului pare să aibă spinul acestei particule. Dacă este vorba de un neutron, proprietăţile atomului nu sunt influenţate în nici un fel, dar dacă particula necuplată este, dimpotrivă, un proton cu sarcină electrică efectivă, atunci rotirea acestei sarcini electrice (spinul) va produce un cuplu magnetic. Rolul acesta al spinului în proprietăţile magnetice ale anumitor elemente nu a fost încă studiat în profunzime şi nici rolul său posibil în producerea prin autoinductie a inerţiei totale (masa) sau parţiale a electronului.

fn toate cele spuse până acum pentru a simplifica am socotit, că masa protonului şi aceea a neutronului sunt egale şi că cea a electronului este practic egală cu zero. Aceasta nu este decât o aproximaţie; în realitate, masa protonului, m_p, este 1,00076, cea a

neutronului m_n este 1,0089, cea a electronului m_e este 0,0005. Aşadar:

$$m_p + m_e = 1{,}0081 < m_p$$

(dacă socotim greutatea atomică a oxigenului egală cu 16).

Aceste mici diferenţe nevinovate în aparenţă au consecinţe incalculabile... prea bine calculate.

Suma maselor protonului şi a neutronului este 2,00165 însă atunci când se unesc pentru a forma un deuteron (greutate atomică 2, nucleu al hidrogenului greu, izotop al hidrogenului obişnuit) masa acestuia nu este decât 2,00142. Diferenţa este transformată în 2.200.000 de electron-volţi de energie. În acelaşi fel, greutăţile (sau masele) particulelor care alcătuiesc nucleul de heliu dau un total de 4,0322, în timp ce masa atomului de heliu nu este decât 4,0027. Dispariţia acestei mase mici reprezintă o eliberare de energie de 28.000.000 de electron-volţi. Acesta este principiul bombei cu hidrogen şi al energiei radiaţiei solare.

Atomii anumitor elemente, în loc să fie izolaţi, se grupează doi câte doi în moleculele care sunt adevăratele particule elementare ale acestor corpuri simple; este cazul hidrogenului, al oxigenului şi al clorului; atomii izolaţi ai acestor corpuri pot intra doar în combinări cu alte corpuri. Heliul, neonul, argonul, carbonul etc. sunt monoatomice.

Electrovalenţa, sau dobândirea sau pierderea unui electron atras sau expulzat de un atom nu este singura modalitate de combinare chimică. Mai avem şi covalenţa atunci când o pereche de electroni face parte din doi atomi în acelaşi timp, fiecare furnizând câte unul precum şi valenţa coordonată atunci când cei doi electroni fac parte în acelaşi timp din doi atomi provin de la acelaşi atom.

Un exemplu de covalenţă: tetraclorura de carbon (folosită în stingătoarele de incendii) are un atom de carbon, C, şi 4 de clor, CI. Carbonul, care are 4 electroni pe învelişul exterior, ar vrea să şi completeze până la 8. Clorul are 7 electroni pe învelişul exterior şi-i ar vrea şi el să şi-i completeze până la 8. Atunci, carbonul va da cu împrumut pe fiecare dintre electronii săi exteriori câte unui atom de clor şi reciproc (atunci fiecare atom de clor va împărţi doi electroni cu atomul de carbon), fig.

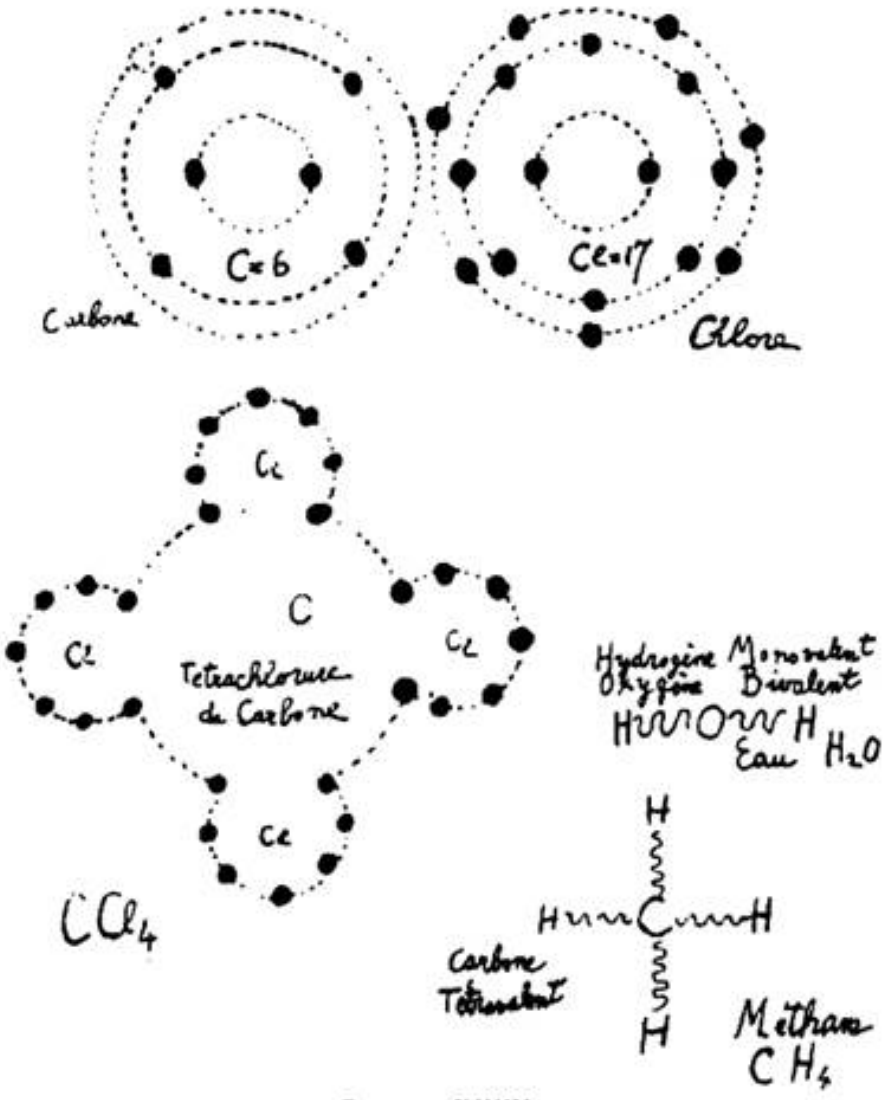
Vedem că elementul carbon este tetravalent, se poate combina cu alţi patru atomi, ca în CH_4 şi $CC1_4$. Hidrogenul şi clorul sunt monovalenţi (se combină cu un alt atom), oxigenul este bivalent, azotul trivalent. Carbonul are şi proprietatea unică de a forma lanţuri şi inele.

În plus, carbonul are proprietatea că după ce s-a combinat cu 4

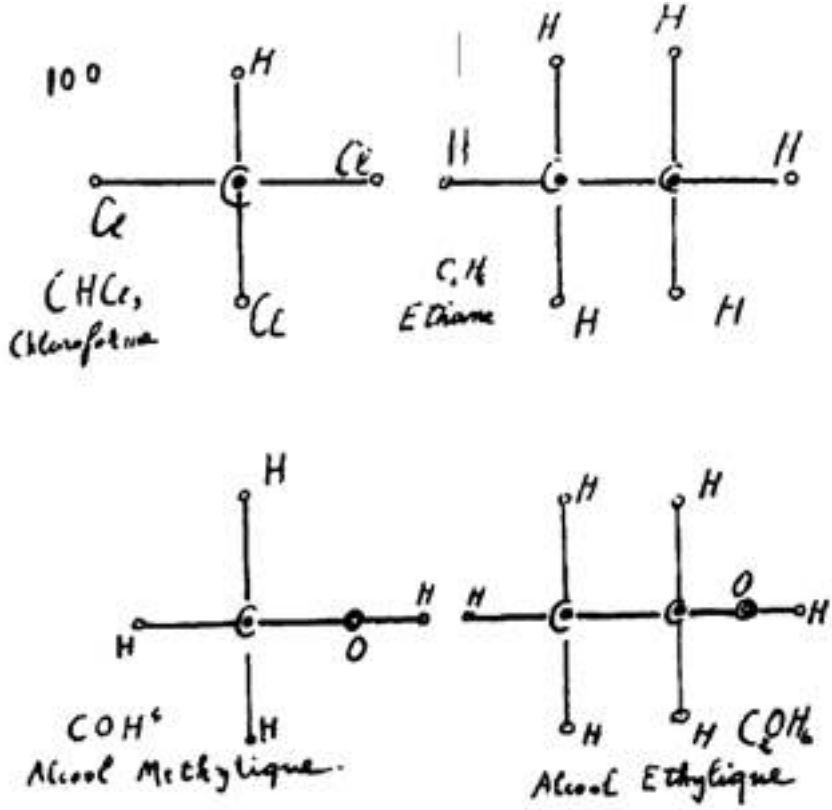
atomi de hidrogen, de exemplu CH_4, într-o astfel de moleculă un atom oarecare de hidrogen poate fi înlocuit de un atom dintr-un alt corp monovalent. În acelaşi fel un atom de clor din cloroform $CHC1_3$ a fost înlocuit de un atom de hidrogen (planşele XXVIII şi XXVII).

În etan (C_2H_6), un atom de hidrogen a fost înlocuit de un grup CH_3 nesaturat care mai avea o legătură liberă (planşa XXVIII).

Carbonul are deci posibilitatea unei legături covalente, care explică rolul său de primă însemnătate în chimia organică şi în cea anorganică.



PLANȘA XXVII



PLANŞA XXVIII

Numim carbohidraţi combinările organice compuse numai din carbon, hidrogen şi oxigen (incluzând zaharurile, amidonul,răşinile produse de fotosinteza plantelor).

Numim hidrocarburi combinările de carbon şi de hidrogen (uleiuri minerale).

Benzolul (C_6H_6) este punctul de plecare al şirului inelar, metanul (CH_4) al şirului catenar (planşa XXIX).

Moleculele de hidrocarburi cu bază inelară hexagonală formează „substanţele aromate", cele cu bază catenară substanţele „alifatice" (uleiuri şi grăsimi). Diamantul (carbon cristalizat) formează o reţea inelară şi catenară totodată, cu simetrie cuboctaedrică.

Doi carbohidraţi importanţi:

Alcoolul metilic sau alcoolul de lemn (lemn sau rumeguş distilat) se fabrică sintetic cu oxid de carbon CO şi hidrogen H. Formula lui este COH_4 (planşa XXVIII). Este o otravă.

Alcoolul etilic, C_2OH_6, alcool din cereale sau din vinuri. (Pentru a-1 „denatura" se adaugă 10% alcool metilic. Planşa XXVIII).

Zaharurile sunt, după cum se ştie, rude cu alcooli.

Zaharoză (zahăr din sfeclă) lactoză
Zahăr de trestie și maltoză
Zahăr de struguri, dextroză, glucoză
} $C_{12}H_{22}O_{11}$
} $(C_6H_{12}O_6$

Iată formulele câtorva combinări chimice importante pe care le întâlnim în viaţa de zi cu zi; să notăm că N[1] este simbolul azotului (nitrogen) de care nu am pomenit până acum. Apare ca element cu tendinţe combinatorii (5 electroni pe învelişul exterior) în fruntea coloanei suspecte fosfor, arsenic, antimoniu, dar se arată a fi elementul cardinal în proteine, substanţe esenţiale în alimentaţia omului. Iată şirul catenar derivat din metan:

Metan	CH_4	gaze
Etan	C_2H_6	
Propan	C_3H_8	
Butan	C_5H_8	

Metan	CH_4	gaze
Etan	C_2H_6	
Propan	C_3H_8	
Butan	C_5H_8	
Pentan	C_5H_{12}	benzine lichide
...		
Octan	C_8H_{18}	
...		
Decan	$C_{10}H_{22}$	
	C_9H_{20}	petroluri lampante lichide
	$C_{16}H_{34}$	
	$C_{21}H_{44}$	solide (parafine)
	$C_{27}H_{54}$	

Din C_4H_8 (butanul) derivă cauciucurile sintetice.

Alcaloizii alcătuiesc o grupare de substanţe organice de origine vegetală care conţin cel puţin un atom de azot (N) într-o structură inelară.

Cocaina	$C_{17}H_{21}O_4N$
Codeina	$C_{18}H_{21}O_3N$
Morfina	$C_{17}H_{19}O_3N$
Nicotina	$C_{10}H_{14}N_2$
Chinina	$C_{20}H_{24}O_2N_2$
Stricnina	$C_{21}H_{22}O_2N_2$
Cafeina, teina	$C_8H_{10}O_2N_4$
Cloroform	$CHCl_3$
Anilina	$C_6H_5NH_2$
Gazul ilariant (protoxidul de azot)	N_2O

Eterul sulfuric (nu conţine sulf, dar în prepararea lui intră acidul sulfuric (H_2S0_4) $(C_2H_5)_20$). Clorul, element chimic avid (7 electroni pe învelişul exterior) şi deseori veninos, intră în formula multor gaze toxice, precum fosgenul $COCl_2$, gazul muştar $SC_4H_gCl_{12}$. Cianidul de hidrogen sau acid prusie, otravă puternică, are formula HCN.

Cianogenul (altă otravă) C_2N_2.

Celuloza (se poate transforma în glucoză prin „hidroliză“, $(C_6H_{10}O_5)n$.)

Oxidul de carbon, toxic: CO.

Acidul carbonic $C0_2$ sau H_2 $C0_3$ când este amestecat cu apă.

Sulfura de hidrogen H_2 S (ouă clocite).

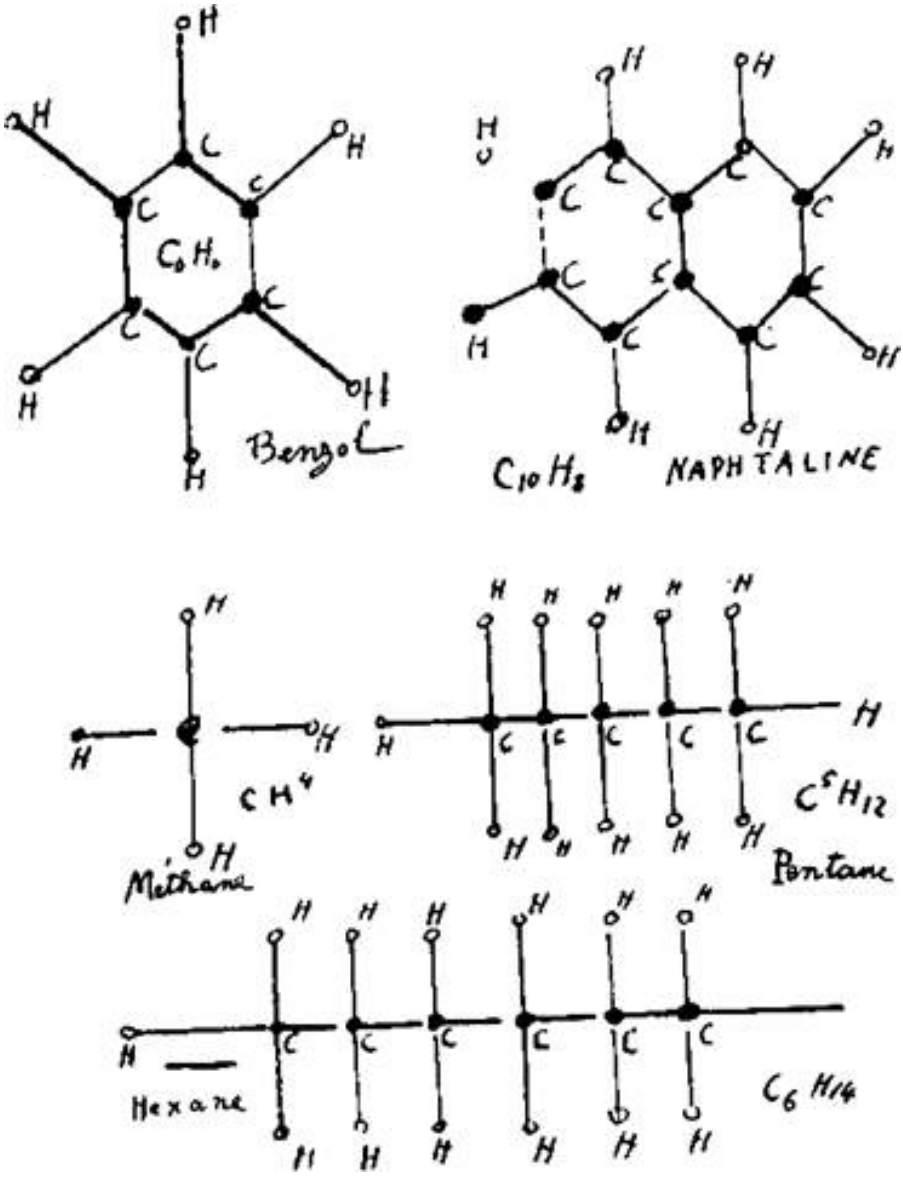
Acizii bărbiturici (saporifice) conţin şi ei C, H, O, N, cum este veronalul $C_4H_4N_20_3$.

Şi vitaminele sunt hidraţi de carbon. Vitamina A este un hidrat de carbon pur $C_{20}H_{29}OH$. Vitamina este un hidrat de carbon combinat cu CI.

Calciu Ca şi siliciu Si sunt elemente metalice foarte importante în viaţa omului şi în natură în general (corpul omenesc la o greutate medie de 76 Kg, conţine 20 Kg de calciu, scoarţa terestră conţine 28% siliciu, îndeosebi de origine organică).

Din calciu se obţine:

Varul nestins pur (oxid de calciu) Ca O.



PLANŞA XXIX

Carbonatul de calciu sau calciul, $CaC0_3$, care stă la baza tuturor calcarurilor, conţine mai ales elemente organice, corali, foraminifere. Marmurii sunt calcan cristalizaţi, precum stalactitele şi stalagmitele. Creta este un calcar de pământ amestecat cu resturi organice, varul obişnuit un calcar amestecat cu noroi, creta marnoasă un calcar amestecat cu argilă.

Varul stins (amestecat cu apă) - $Ca(OH)_2$.

Ghipsul este un sulfat de var cristalizat, CaS_4, iar alabastrul calcaros, onixul calcaros sunt varietăţi de calcit.

Varul hidraulic conţine argilă, cimentul este un var eminamente

hidraulic, mortarul obişnuit conţine var gros, nisip şi apă. Betonul obişnuit se compune din mortar şi pietriş.

Siliciul este un element metalic la fel de remarcabil ca şi calciul.

Siliciul pur sau oxidul de siliciu Si_20_4 sau Si_20_2, este cristalul de stâncă sau cuarţul pur, având drept varietăţi colorate: ametistul, agatul, calcedonitul, onixul, jaspul, cornalina.

Pietrele de moară, silexurile, nisipurile, gresiile (cristalizate sau argiloase) sunt constituite din silice conţinând mai multă sau mai puţină alumină (oxid de aluminiu) şi fier. Gresia ceramică conţine pastă coalinică şi uneori feldspatică. Feldspatul este un silicat de aluminiu cu bază monoxidă (potasiu, sodă, var). Argila pură sau caolinul este un silicat hidratat de alumină $Al_20_3.2Si0_2.2H_20$; se formează prin descompunerea feldspatului. La porţelan pasta este un amestec de caolin şi feldspat cu glazură feldspatică.

Multe alte geme sunt, de asemenea, alcătuite în parte din siliciu; opalul este siliciu hidratat. Jadul este un silicat de magneziu şi de calciu (nefrit) sau un silicat de sodiu şi alumină (jadeită); jadul negru (cloromelanita), înrudit cu jadeita, are în plus 10% oxid de fier.

Sticla este, în general, un silicat dublu de calciu şi sodiu.

Cât priveşte rubinele şi safirele, ele sunt alumine (oxidul de aluminiu $A1O_3$). În stare pură alumina se prezintă ca safir înstelat, safir albastru, rubin, ametist şi topaz orientale („nobile"), acvamarin, hiacint.

Silicaţii şi aluminele, decorativi în stare pură, sunt deci şi ei aliaţi cu principalele producţii decorative ale omului, sticla şi porţelanul.

Cele 92 de elemente din tabelul lui Mendeleev erau socotite până nu de mult ca reprezentând toate combinările elementare posibile ale materiei anorganice, iar faptul că spectroscopul nu descoperea pe celelalte planete şi chiar în stelele cele mai îndepărtate decât elemente aparţinând tabelului contribuise la întărirea acestei păreri.

Experienţele care au însoţit fisiunile atomice provocate cu ajutorul uraniului au făcut ca această certitudine să fie părăsită.

Dacă până acum natura nu a produs decât cele 92 de elemente, omul cel puţin a izbutit să creeze în laboratorul său, în mod artificial, adică prin iscusinţa sa, mai întâi neptuniul (cu numărul atomic 93) şi plutoniul 94, acesta din urmă fiind folosit ca ingredient în unul din cele două tipuri de bombe atomice, mai apoi, în mod succesiv, elementele cu numerele atomice 95, 96, 97, 98, 99 şi 100 numiţi: americiu, curiu, berkeliu, californiu, ateniu şi centuriu. Nimic nu dovedeşte că lista este definitivă.

Iată ultimele 11 elemente din tabelul actual al corpurilor simple:

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
232,1	231	238,1	237	239	241	242	243	244		
Toriu	Proto-actiniu	Uraniu	Neptuniu	Plutoniu	Americiu	Curiu	Berkleliu	Californiu	Atheniu	Centuriu

Ceea ce am putut vedea în treacăt despre chimia anorganică ne-a arătat că numărul apare aici ca factor indicativ şi constitutiv nu numai la scară atomică, ci şi mult mai adânc, pe măsură ce pătrundem în interiorul atomului şi chiar în nucleu; apare aici aproape în stare pură, iar noţiunile de par sau impar, atât de îndrăgite de pitagoreici când fac speculaţii despre numerele pure sau ştiinţifice, apar şi ele, în legătură firească cu noţiunile de simetrie şi asimetrie dinamică.

Biologia organică propriu-zisă ar depăşi cu mult cadrul acestui capitol; numărul figurează şi el aici însă în formule mult mai complicate din pricina varietăţii şi dimensiunilor moleculelor organice constituite din atomi în număr considerabil care fac ca greutăţile moleculare să atingă valori enorme. Clasa organică cea mai importantă, organizată şi ea în molecule specifice, este aceea a proteinelor, azotul fiind elementul caracteristic, ele fiind indispensabile în hrana şi dezvoltarea organismelor vii. Substanţele care le alcătuiesc sunt aceleaşi pe care le-am găsit în chimia anorganică; şi aici, în afară de azot, oxigenul, hidrogenul şi carbonul sunt componente fundamentale. Hormonii masculini şi feminini au, de pildă, următoarele formule:

C_2OH_{27} + OH (testosteron) şi

C_2OH_{27} + C_2 OH_3 (progesteron).

Am văzut că în fotosinteză plantele, datorită acţiunii luminii solare asupra clorofilei, transformă energia de tensiune joasă (degradată) în energie de tensiune înaltă, ecuaţia simbolică a acestei reacţii fiind:

$6CO_2 + 6H_2O = C_6H_{12}O_6 + 6O_2$

lumină solară + acid carbonic + apă = zahăr + oxigen.

Vegetalele extrag şi ele azotul din sol şi îl condensează în proteine, care servesc la rândul lor drept hrană animalelor. Cât despre clorofilă, ecuaţia ei pare să fie:

Clorofila a $C_{55}H_{72}O_5N_4Mg$

Clorofila b $C_{55}H_{70}O_6N_4Mg$

Să menţionăm aici, plutind încă între domeniul chimiei anorganice

şi cel al chimiei organice (deşi biologiii sunt ispitiţi să-i clasifice în domeniul din urmă), viruşi filtranţi, agenţi patogeni atât de mici încât nu sunt vizibili la ultramicroscopul obişnuit, ci doar la microscopul electronic[78]. Ei cuprind, între alţii, agenţii patogeni ai gripei, ai guturaiului obişnuit, ai tifosului, ai variolei, şi par să facă parte totodată din caracteristicile bacteriilor vii şi din cele ale cristalelor anorganice (asta înseamnă că pot fi reduşi în cristale care îşi păstrează proprietăţile patogene şi de proliferare când ajung în contact cu corpul subiectului sensibil la virus, al gazdei).

Mozaicul tutunului, de pildă, se poate cristaliza, după purificare, în nişte ace lungi care, puse din nou în contact cu planta de tutun, redevin virulente.

Virusul care provoacă boala tomatelor cristalizează în dodecaedre rombice sub acţiunea unui tratament asemănător.

Din punct de vedere chimic, viruşii sunt nişte proteine cu greutate moleculară mare de ordinul a 40 de milioane faţă de cea a hidrogenului. (Greutatea moleculară a unui amestec gazos este egală cu dublul raportului densităţii sale faţă de cea a hidrogenului; greutatea atomică a hidrogenului este 1,008 şi nu 1; este luată ca unitate greutatea atomului de oxigen socotită a fi 16. în general, greutatea moleculară a unui element este egală cu greutatea moleculei sale comparată cu cea a atomului de hidrogen.)

Câteva exemple de dimensiuni în lumea viruşilor şi a moleculelor:

Dacă $\mu\mu$, milimicronul $= \frac{1 m/m}{1.000.000}$ este unitatea de lungime, bacteria Bacterium prodigiosus are o lungime de 750 $\mu\mu$.

Virusul epidemiei bovine clasice are 10 $\mu\mu$ (este deja de ordin molecular).

O moleculă de hemoglobină are 6 $\mu\mu$.

Virusul mozaicului tutunului: un bastonaş cu lungimea 2,80 $\mu\mu$ şi lăţimea 15 $\mu\mu$.

Microscopul electronic ne permite practic să vedem obiecte de 5 $\mu\mu$, adică şi pe cei mai mici viruşi.

Să notăm că greutatea celei mai mici molecule de proteină este de 5.000 de ori mai mare decât greutatea unui atom de hidrogen. Greutatea celor mai mari molecule de proteină cunoscute este mai mare decât aceea a atomului de hidrogen de 1.000.000 până la 40.000.000 de ori.

O spun încă o dată, statutul viruşilor, poziţia lor exactă între

organic şi anorganic nu este definitiv hotărâtă, deşi pentru moment biologia înclină mai degrabă în favoarea primei ipoteze. Ca şi speciile vii, viruşii au mutaţii, dar par să fie molecule de proteină (identice în anumite cazuri cum este cel al virusului tomatei) cu anumite proprietăţi biologice proprii sistemelor organizate.

GENETICA

Să trecem de la domeniul abia atins al chimiei, biologiei, la genetică, regatul cromozomilor şi al genelor. Fiecare celulă a unui organism viu conţine două grupe identice de „cromozomi", mici filamente în număr total de 2N, după specie (omul are 48 de cromozomi în fiecare celulă normală).

Celulele sexuale mature, înainte de fecundarea ovulului, se despart în 2 gameţi sau celule „haploide", conţinând fiecare doar jumătate, N, dintre cromozomii (unul de fiecare pereche) celulei mame. La fecundare (singamie) un gamet masculin (spermatozoidul) şi un gamet feminin (ovulul) se unesc şi în felul acesta grupele de cromozomi se refac cu acelaşi număr N de perechi de cromozomi pe care îl aveau înainte de fisiunea celulelor sexuale. Începând cu celula fecundată, înmulţirea celulelor se produce succesiv prin simple împărţiri în două; în timpul acestui fenomen de „mitoză", fiecare cromozom se rupe în două părţi egale, fiecare parte instalându-se într-una din cele două celule fiice; numărul 2N al cromozomilor din fiecare celulă rămâne astfel constant.

S-a calculat că 60 de împărţiri succesive sunt de ajuns pentru a da naştere corpului unui om adult, ţinând seama de deşeuri de celule moarte şi dispărute. Aceasta înseamnă în jur de 100.000.000.000.000 (10^{14}) de celule.

Tot astfel s-a calculat că un englez din zilele noastre, situat la vreo 30 de generaţii de la cucerirea normandă (1066) a avut în vremea acestei cuceriri mai mult de 500 de milioane de eventuali strămoşi, or, cum Anglia nu număra la vremea aceea decât 8.000.000 de locuitori vedem ce număr enorm de urmaşi au aceiaşi strămoşi, presupunând că individul despre care este vorba are 100.000 sau chiar un milion de strămoşi efectivi printre cei 8.000.000.

Puterile lui 2 se comportă aici ca în vestita problemă a jocului de şah în care câştigătorul îi ceruse Şahului Persiei să pună o boabă de grâu în primul pătrat, 2 boabe în al doilea şi aşa mai departe, dublând numărul în fiecare pătrat, ajungând astfel la 2^{64} boabe de grâu. Aceasta ne aminteşte cazul parameciului, protozoar care se reproduce rapid prin diviziune scizipară şi a cărui progenitură, după un an, ar avea greutatea globului... dacă, în ciuda imortalităţii teoretice, aceste generaţii nu ar dispărea la fel de repede cum apar.

Se ştie acum că cromozomii sunt alcătuiţi dintr-un anumit număr de elemente, genele, fiecare dintre acestea purtând şi transmiţând o caracteristică ereditată specială. Genele acestea sunt probabil

molecule de proteină, şi la fecundarea oului fiecare părinte îşi transmite în acest fel caracteristicile o dată cu genele reprezentate în grupa de cromozomi pe care o furnizează celulei primordiale a noului individ, oul fecundat.

Legile de transmitere şi de repartizare a calităţilor ereditare au fost formulate pentru întâia oară de către abatele Gregor Mendel (1822-1884) şi publicate de Brünn (Moravia) în 1866. La vremea aceea nu au fost luate în seamă, însă au fost regăsite în 1900 de către Vries (Leida) şi de către alţi doi savanţi care lucrau independent unul de altul. Gena, recunoscută azi ca fiind purtătoarea specificaţiilor ereditare ale individului şi ale speciei, se presupune că ocupă volumul unui cub cu latura egală cu 100 de diametri de atomi (adică de 100 de ori distanţa dintre centrele a doi atomi dintr-un cristal, de exemplu). Acest cub ocupă deci volumul a aproximativ un milion de atomi. În interiorul acestor gene se produc mutaţiile care afectează calităţile transmisibile, ereditare. Iar după foarte ingenioasa teorie a lui Schrodinger (*What is Life ?*), mutaţia este cauzată de un fenomen fizic din interiorul genei (căci acest fenomen nu se întâmplă decât într-un singur cromozom şi nu în cele două elemente ale unei perechi de cromozomi), iar acest fenomen fizic este asemănător cu un *salt cuantic* al unui electron de pe o orbită pe alta, salt care degajă sau absoarbe de fiecare dată un număr întreg de cuante după sensul diferenţei de nivel energetic al orbitelor. Schrodinger presupune (şi nimic nu i-a dezminţit ipoteza) că mutaţia nu este numai asemănătoare cu un salt cuantic, ci este efectiv pricinuită de un salt de acest gen, trecerea unuia sau mai multor electroni de pe o orbită pe alta, prin *ionizare*. În genă s-ar produce modificarea structurală care acţionează asupra caracterelor transmise ca mutaţie. Dar care ar fi cauza mutaţiei? Ştim că mutaţiile pot fi produse artificial iradiind genele unui organism viu cu raze x (fapt care pare să întărească teza lui Schrodinger). Cât despre mutaţiile „naturale", am socotit razele cosmice nişte agenţi disruptivi sau ionizatori. Biologii cu tendinţe teleologice, care văd natura şi viaţa acţionând ca şi când ar urmări anumite scopuri, luând în consideraţie faptul că în cursul evoluţiei multe mutaţii se produc şi se combină chiar şi într-un sens „folositor" mai favorabil, sunt înclinaţi să creadă că acţiunea, cauza care dă naştere acestor salturi cuantice favorabile, ar putea fi câteodată o acţiune psihică (de origine extrafizică, „psyche" mai degrabă a speciei decât a individului), provenind dintr-o nevoie sau dintr-o dorinţă care acţionează într-o anumită direcţie .(După cum spunea Schopenhauer într-o parafrază, ogarul ar fi „voinţa obiectivată de a se repezi").

Dr. Schrodinger nu-şi spune părerea însă nu exclude posibilitatea acestor „mutaţii dirijate"; acţiunea purei întâmplări ar introduce probabilităţi contrare de acelaşi ordin ca cele amintite de problema

maimuţelor dactilografe sau a neaplicării principiului lui Carnot într-un sistem închis anorganic. Energia necesară pentru ionizarea care are drept rezultat adăugarea sau pierderea unui electron secundar, manifestarea fizică a saltului cuantic, este de aproximativ 30 de electron-volţi. Mutaţia, în loc să dea naştere unui izomer sănătos, poate produce o leziune nocivă cromozomului care conţine gena afectată.[79]

Concluziile dr. Schrodinger sunt cât se poate de imparţiale; el nu trece oficial de partea teleologilor însă scrie:

„Desfăşurarea evenimentelor în ciclu vital al unui organism arată neîndoielnic o regularitate admirabilă, fără egal în materia neînsufleţită. Ea pare a fi controlată de un grup de atomi extrem de bine ordonat, care îşi are echivalentul doar într-o foarte mică parte din total în fiecare celulă... în cromozomi ordinea este menţinută de un singur grup de atomi care are puterea să producă evenimente bine ordonate în armonie cu ceea ce le înconjoară şi în acord cu legile cele mai subtile... Situaţia este fără precedent şi nu este cunoscută nicăieri decât în materia vie".

Ceea ce îl uimeşte pe drept cuvânt pe dr. Schrodinger este tocmai influenţa disproporţionată asupra organismului a jocului sau a prezenţei unui număr infim de atomi, cât şi venirea sau plecarea unui atom; cugetările sale sunt cu atât mai neobişnuite cu cât este partizanul nu atât al vitalismului, cât, mai ales, al determinismului fizico-chimic clasic.

Una dintre proprietăţile paradoxale ale viruşilor este de a produce mutaţii ereditare. Misterul stă în faptul că viruşii sunt molecule de proteină atât de mici încât este greu de închipuit că ele conţin cromozomi şi gene.

Numărul de perechi corespunzătoare de gene caracteristice	Numărul de gameți formați în fiecare părinte	Binom	Numărul combinărilor (ouă fertilizate)
1	2	$(3 + 1)^1 = 4$	$2^2 = 4$
2	$2^2 = 4$	$(3 + 1)^2 = 16$	$2^2 = 16$
3	$2^3 = 8$	$(3 + 1)^3 = 64$	$2^2 = 64$
n	2n	$(3 + 1)^n$	2^{2n}
n = 24 pentru... om (24 de perechi de cromozomi)	2^{24} (în jur de... 16.000.000 numărul a combinărilor de 24 obiecte luate două câte două	$(3 + 1)^{24}$	2^{48} (200 de trilioane de tipuri de copii posibile)

Tabelul lui Mendeleev îşi are aspectele sale matematice; nu ne vom mira să găsim aici puterile lui 2 omniprezente în oricare domeniu unde apar combinări, precum şi coeficienţii binomului. Iată un extras din baremul aferent:

UNDE ŞI NUMERE

Înainte de a ne despărţi de chimia organică şi anorganică am să mai reamintesc câteva cifre pentru a preciza dimensiunile elementelor atomice şi infraatomice.

Raza atomului este de aproximativ 1 mm/10.000.000 sau 10^{-8} cm; se mai numeşte şi „raza de acţiune a atomului”.

Nucleul atomului are un diametru (şi o rază) de 10.000 de ori mai mică decât cel al atomului[80].

Diametrele electronilor planetari: $3{,}2 \times 10^{-13}$ cm.

Diametrul nucleului de uraniu este $1{,}4 \times 10^{-11}$ cm.

Diametrul nucleului de aur este 2×10^{-12} cm.

Distanţa dintre 2 atomi de carbon în diamant este $1{,}54 \times 10^{-8}$ cm.

Dacă $16^{-16} = \omega$, atunci pentru aur vom avea de pildă:

diametrul protonului $= \omega$

diametrul electronului $= 10^{-3}\,\omega$

diametrul nucleului $= 2 \times 10^{4}\,\omega$

diametrul atomului $= 2 \times 10^{8}\,\omega$

Unităţile folosite pentru a măsura dimensiunile mici în chimie, biologie se aplică, după cum am văzut:

Micronul

$$\mu = \frac{1mm}{100}\ ;\ Milimicronul\ \mu\mu = \frac{1\mu}{1000}\ ;$$

$$\text{Angström} = \mathring{A} = \frac{1\mu\mu}{10}\ ;\ \text{Unitatea X}\ \ UX\frac{1\mathring{A}}{1000}$$

Iată acum, pentru a compara aceste unităţi, un tabel cu lungimile de undă aparţinând undelor electromagnetice, care cuprind undele hertziene, folosite în radiologie şi radio, precum şi undele luminoase şi cele calorifice.

între λ — lungimea de undă, *v* - viteza, *f* - frecvenţa, *t* - perioada (timpul necesar pentru o oscilaţie) avem:

$$\lambda = \frac{v}{t} \; ; f = \frac{1}{T}$$

Planşa XXX dă lungimile diferitelor unde grupate în octave pe o claviatură imaginară, vedem în special că undele calorifice sunt (aproape de infraroşu) unde electromagnetice cu lungimi de undă de la 100 μ până la μ. În octava undelor luminoase avem pentru roşu de la 100 μ până la μ. în octava undelor luminoase avem pentru roşu λ = 0 μ 65, pentru violet λ = 0 μ 42.

LUNGIMI DE UNDĂ

Dinam curent alternativ	Unde lungi radio	Unde scurte radio	Căldură (infraroşu)	Lumina	Ultra violet	Raze X	Radiu	Raze cosmice
6000 kilometri	30 km la 200 m 22 →	100 m la 0,5 m apoi câţiva milimetri octave	3,14 μ la 0,8 μ 8 octave	0,8 μ la 0,4 μ 1 octavă	0,4 μ la 0,15 μ 5 octave	0,015 μ la 0,000006 12 octave	0,0001 μ la 0,100002 5 octave	0,00002 $\mu\mu$

PLANŞA XXX

Întrucât culorile spectrului luminos sunt caracterizate şi prin frecvenţa vibraţiilor [acestea fac parte din marea gamă a undelor începând cu undele hertziene radiofonice şi până la cele pe care le emit corpurile radioactive (vezi tabelul VII)], aceasta a sugerat unor esteticieni comparaţii ingenioase între octava spectrului luminos (lungimi de undă de la 800 $\mu\mu$ pentru violet până la 400 $\mu\mu$ pentru roşu) şi gama temperată a muzicienilor. Prin analogie cu cercul muzical al cvintelor, s-au stabilit mai multe cercuri cromatice pentru culori. Se ştie că sunt două şcoli antagoniste în ce priveşte desemnarea culorilor primare: şcoala fizicienilor (Helmholtz), pentru care culorile primare sunt albastru, verde şi roşu, iar cele complementare galben, violet şi verde-albastru[81], şi şcoala artiştilor, pentru care culorile primare sunt albastru, roşu şi galben, iar cele complementare portocaliu, verde şi violet.

Wilson a combinat un cerc cromatic în 12 segmente, în care fiecărei culori îi corespunde o notă din gama temperată (culorile primare sunt albastru: la; galben: fa; roşu: re; iar cele complementare

portocaliu: mi; violet: do; verde: sol).

Un alt cerc cromatic cu 12 segmente conţine 4 triade sau acorduri de 3 culori pentru care culorile progresează prin cvinte asemenea notelor în gama pitagoreică; ca şi în gama lui Wilson, punctul de plecare este acelaşi ca pentru şcoala artiştilor, prima triadă furnizând culorile primare roşu, albastru, galben, iar cea de-a treia pe cele complementare verde, portocaliu, violet. Putem spune (şi aceasta este părerea lui Andre Lhote) că acest acord verde, portocaliu, violet corespunde (în pictură) acordului perfect; este major şi minor după cercul cromatic folosit. De pildă Do, Mi, Sol este major în cercul lui Wilson; o nuanţă de violet dă Mi, Sol, Si, acord perfect minor.

Nu ne putem despărţi de chimie fără să dăm câteva nume „absolute" care apar în acest domeniu, mai întâi vestitul „Număr al lui Avogadro". Câteva definiţii preliminare sunt necesare; am văzut că greutatea moleculară a unui grup este raportul dintre greutatea unei molecule a acestui corp şi aceea a unui atom de hidrogen (sau de 2 ori raportul dintre greutatea moleculei sale şi aceea a moleculei de hidrogen, hidrogenul fiind biatomic).

Molecula-gram este în acest caz egală cu un număr de grame egal cu greutatea moleculară a substanţei:
(M = 2 grame pentru hidrogen
= 32 grame pentru oxigen etc.).

Or, o moleculă-gram (M grame) din oricare gaz la 0° şi 760 mm, ocupă acelaşi volum, 22,4 litri, şi conţine acelaşi număr de molecule, 6,06 $\times$ 10^{23}; este „Numărul lui Avogadro". Volume egale de gaze oarecare (diferite) au la aceeaşi temperatură acelaşi număr de molecule, adică 27x 10^{15} molecule pe mm^3.

Aici se încheie acest tur de orizont al Universului exterior perceput şi a ceea ce putem ghici sau pricepe din Universul real ale cărui umbre se proiectează ca nişte fenomene măsurabile pe pereţii peşterii noastre, totul fiind considerat din punctul de vedere al Numărului; Număr pe care l-am întâlnit în matematica pură, în geometrie, în morfologia fiinţelor vii şi a cristalelor. Număr în chimie, în biologie, în genetică, Număr în estetică, în artele spaţiului şi în arte în timp (limbajul şi muzica), în sfârşit Numărul în marile legi ale naturii.

În afara domeniilor matematicii străbătute cu prilejul acestui tur de orizont trebuie să-l citez şi pe acela al calculului probabilităţilor, pe care l-am lăsat de o parte nu pentru că nu ar fi foarte important şi că Numărul nu ar juca aici un rol de prim ordin, ci pentru că ar fi extins dincolo de limitele sale fireşti materia acestui volum.

Îmi voi lua îngăduinţa să dau în continuare numai axiomele logistice pe baza cărora Bertrand Russell, după părerea lui C.D. Broad, pune bazele Calculului Probabilităţilor.

Dat fiind conceptul de „probabilitate a lui p dacă h este dat”, denotat de p/h, se pun următoarele axiome:

1° p şi h fiind date, nu există decât o valoare pentru p/h.

2° Valorile posibile ale lui p/h sunt toate numerele reale dintre 0 şi 1, inclusiv acestea două (alţii limitează aceste valori la numerele raţionale).

3° Dacă h îl implică pe p, atunci p/h = 1 (certitudine).

4° Dacă h îl implică pe p $\times$ non-p, atunci p/h = 0 (imposibilitate).

5° Probabilitatea de p şi q, h fiind dată, este probabilitatea p/h înmulţită cu cea de q, p şi h fiind date, şi este egală şi cu probabilitatea q/h înmulţită cu probabilitatea de p dacă q şi h sunt date.

6° Probabilitatea de p şi/sau q, h fiind dat, este probabilitatea p/h plus probabilitatea q/h minus probabilitatea de p şi q, h fiind dat.

Calculul probabilităţilor face fireşte apel la calculul combinărilor, deci la coeficienţii binomului (curba lui Gauss); Keynes l-a tratat şi prin teoria grupurilor.

Unul dintre paradoxurile aparente, potrivnice simţului comun, ale calculului probabilităţilor este legea că la ruletă, de pildă, după ce roşul a ieşit de un foarte mare număr de ori, sunt tot atâtea şanse să iasă roşu sau negru (trecutul nu contează; acest fapt este riguros doar pentru o ruletă ideală şi un crupier ideal, amândoi fără ecuaţie personală). Dovada matematică a paradoxului aparent este că la un şir foarte mare de ieşiri consecutive, numărul şirurilor de n roşii este egal cu numărul şirurilor $\overline{n+1}$ roşii plus numărul şirurilor $\overline{n+2}$ roşii plus ect. Sau: la fiecare ieşire, şansa ca roşu să iasă o dată (intermitenţă) este egală cu şansa pentru un şir de 2 roşii plus şansa pentru un şir de 3 roşu plus etc.

De pildă, pentru 1024 de ieşiri vor fi aproximativ 512 intermitenţe (1 roşu), 256 de şiruri de 2,128 de şiruri de 3, 64 de şiruri de 4, 32 de 5, 16 de 6, 8 de 7, 4 de 8, 2 de 9, un şir de 10 de roşu. Acum câţiva ani, roşul a ieşit de 29 de ori la rând la Monte Carlo.

Ne rămâne să tragem concluziile, dacă sunt, şi să hotărâm dacă „Mistica îngheţată a Numărului Pur“ este, pentru a concepe şi a cerceta Cosmosul, un element care sărăceşte, secătuieşte sau, dimpotrivă, aşa cum pretindeau Pythagoras şi Platon, un izvor de armonie, o îmboldire a dorinţei, a strădaniei către un ideal senin, chiar exaltant.

CONCLUZII

Teleologia este o doamnă fără de care nici un biolog nu-şi poate duce traiul. Şi totuşi se ruşinează să fie văzut cu ea în lume.
(Von BRUCKE)

O concluzie preliminară care reiese din tot ce s-a spus până acum este mai întâi de toate aceea că, aşa cum zicea Bertrand Russell, axioma fundamentală a lui Pythagoras îşi găseşte confirmarea:

„Totul este rânduit după Număr"

Îşi găseşte, de asemenea, confirmarea afirmaţia pitagoreică exprimată limpede de Nicomachos din Gerasa conform căreia în universul fenomenelor percepute de simţurile noastre importantă este structura, iar nu substanţa. Toate acestea rezultă din tot ceea ce a adus la lumină fizica-matematică modernă, studiu al structurilor şi al invariantelor perceptibile şi calculabile în universul înconjurător. Instrumentele acestei explorări au fost nu numai mecanica pură şi aplicată, relativitatea şi mecanica cuantică ondulatorie, ci şi disciplina matematică foarte abstractă (cu auxiliarul său, calculul tensorial) care, sub denumirea teoria grupurilor, apare, după cum a observat Eddington, atât în structura universului, cât şi în aceea a inteligenţei omeneşti („este ordine pe undeva").

Pythagoras şi Platon situau izvorul armoniei (al ordinii armonioase) în inteligenţă, „Nous-ul" Creatorului, în care îşi au locul arhetipurile fundamentale, Numerele şi Formele (sau Numerele şi Ideile). Numerele ca Ritmuri şi ca Legi, ca regulatoare ale Formelor, şi chiar Numerele pure asemenea celor care figurează în constantele Universului.

Este interesant să constatăm că dintre aceste arhetipuri, Numere şi Forme totodată, Numerele Figurate au fost studiate de Pythagoras, de Platon şi de Descartes, creatorul geometriei analitice[82].

Determinismul fizico-chimic al secolului al XlX-lea, moştenit de la Lucreţiu, încercase să reducă ordinea la o lege oarbă şi influenţabilă, din care nu numai Creatorul, ci şi conştiinţa omenească era exclusă întrucât ea nu era decât o rezultantă a reacţiilor fizico-chimice din corp. (După cum spunea cu eleganţă un personaj al lui Claude Farrere în *Les Civilisés*: „Sufletul este integrala reacţiilor chimice din corp".) Era lipsită de orice facultate autonomă de a voi, de a dori, de a acţiona. Savanţii determinişti nu îşi dădeau seama că putinţa lor de a raţiona, dorinţa lor de a-şi explica conştiinţele prin modele fizico-chimice erau însăşi dovezile preocupărilor teleologice şi sugerau, dacă

le-ai fi admis teoriile, imaginea stranie a unor cumpene care se cântăreau ele însele şi „ştiau că se cântăresc". Până şi cei care fabricau în mod sintetic compuşi organici delicaţi, hormoni sau vitamine, şi care credeau că au înlocuit astfel în mod avantajos acţiunea vieţii, nu chiar, de fapt, decât demoni ai lui Maxwell, fără doar şi poate vii şi teleologici.

Lovitura de graţie dată determinismului materialist a fost constatarea că principiul minimei acţiuni, lege supremă a lumii anorganice (al cărei principiu al inerţiei este un caz limită), nu se aplică sistemelor închise care conţin organisme vii; viaţa (şi aceasta este o revelaţie care are aproape aceeaşi importanţă ca însuşi criteriul) acţionează sau poate acţiona ca o forţă care provine dintr-o direcţie din afara sistemului, dintr-o altă dimensiune. Lucrul acesta părea a se potrivi cu noile ipoteze (Stromberg şi R. Ruyer) despre câmpurile de forţe vii organizatoare autonome care ar genera embriologia şi creşterea organismelor vii şi care, provenind, de asemenea, dintr-o dimensiune exterioară lumii cvadridimensionale a spaţiului-timp einsteinian, ar acţiona asupra câmpurilor electromagnetice ale organismelor vii, ale omului în mod deosebit, pentru a le pune probabil în rezonanţă cu propriile lor frecvenţe.

Aceasta se potriveşte şi cu rezultatele extraordinare obţinute de aparatele radioterapeutice pentru stabilirea diagnosticului şi a tratamentului care trimit unde cu frecvenţe apropiate în organele corpului afectate în mod deosebit de o tulburare patologică[83]. Teoria acestei terapeutici radionice constă în faptul că fiecare organ al corpului omenesc emite o undă electromagnetică cu frecvenţă specifică, ce îşi schimbă frecvenţa când organul este afectat. Platon, cu intuiţiile lui în mod ciudat profetice, declarase că toate bolile corespund unor întreruperi ale armoniei corpului omenesc (a ceea ce am putea numi armonia metabolică); în legătură cu radiaţiile emise sau absorbite de corpul omenesc, el scrie următoarele rânduri în *Philebos*:

„Trebuie să presupuneţi că dintre impresiile pe care corpul nostru le primeşte neîncetat, unele se sting în corp înainte să ajungă la conştiinţă, pe care nu o afectează astfel deloc, însă altele străbat şi corpul, şi conştiinţa şi emit un soi de vibraţie; unele dintre aceste vibraţii sunt specifice corpului sau conştiinţei, unele sunt comune."

Experienţele controlate de telepatie şi de percepţie supranormală efectuate vreme de mai mult de cinciprezece ani de către dr. Rhine la Universitatea Duke din Statele Unite sugerează, de asemenea, existenţa unei lumi extraspaţiale, a unei dimensiuni exterioare lumii fizice normale în care s-ar petrece uneori aceste fenomene. Fenomenele de clarviziune, de vindecare sau de vrajă de la distanţă obţinute de anumiţi medici-vraci sau vrăjitori negri în Africa sau în

Republica neagră a Antilelor, au zdruncinat până şi septicismul unor martori serioşi. Se pare, aşadar, că Viaţa, dacă ţinem seama de aceste manifestări, acţionează dintr-o dimensiune încă imperfect cunoscută care ar putea fi a cincea dimensiune a geometriilor; am văzut că ei au explorat fără greutate aceste lumi cu 4, 5 sau n dimensiuni şi că Numerele figurate ale pitagoricienilor şi triunghiul lui Pascal au permis să se stabilească specificaţiile tuturor hipercorpurilor regulate din hiperspaţiu.

Pentru a ne întoarce la lumea anorganică, ştim că în regiunea sa infraatomică, aceea a particulelor şi a undelor asociate, determinismul absolut, legea însăşi a cauzalităţii, a fost brusc zdruncinat de principiul de incertitudine sau de nedeterminare al lui Heisenberg: este cu neputinţă să percepem sau să calculăm în acelaşi timp poziţia unui electron (sau a unui proton) şi viteza lui. Am menţionat într-un alt capitol aproximaţiile la care se ajunge considerând cunoscut unul din aceşti doi factori.

Această lovitură dată determinismului îi necăjeşte (pe nedrept, mi se pare) pe partizanii săi fanatici, însă determinismul rămâne adevărat pentru lumea neînsufleţită la scară macroscopică. Argumentul potrivit căruia printre cauzele care împiedică precizia în observarea particulelor se află prezenţa şi acţiunea observatorului, care ar acţiona asupra vitezei sau asupra poziţiei electronului (tot aşa cum aplicarea stetoscopului deranjează ritmul inimii), se pare că şchioapătă puţin, căci până la urmă ne-am putea închipui, ca în alte cazuri asemănătoare, „observatorul ideal"; însă savanţi atât de eminenţi ca Louis de Broglie declară că în domeniul infraatomic legea riguroasă a cauzalităţii este definitiv sortită eşecului şi nu putem decât să fim de acord[84].

Intervenţia matematicienilor în studierea Universului, departe de a aduce concluzii dezamăgitoare pentru filosof şi de a tăia aripile idealului, a favorizat, dimpotrivă, ceea ce Sir James Jeans numeşte „o concepţie mentalistă despre lume"; Jeans se gândea în mod deosebit la dematerializarea pentru totdeauna a materiei (aceea prevăzută de Gustave Le Bon), transformarea ei mai întâi în energie pură (tot vestita formulă a lui Einstein $E = mc^2$), apoi conceperea undelor asociate care sunt unul din cele două aspecte echivalente ale ultimelor particule pseudomateriale, ca unde de probabilitate pură, grile de cifre sau „unde de cunoaştere" situate şi ele, asemenea misterioaselor câmpuri de forţe vii organizatoare, într-o lume în afara spaţiului-timp fizic.

Filosofii materialişti (mai sunt mulţi, îndeosebi în Franţa) nu au privit cu ochi buni amestecul matematicienilor în treburile lor şi i-au rugat, uneori plini de arţag, să-şi vadă de ale lor şi să lase în pace metafizica. Departe de a le asculta sfatul, matematicienii au dezvoltat

pe îndelete concluziile logice sugerate de fizica matematică modernă. Astfel dr. Whittaker, profesor de matematică la Universitatea din Edinburg, a calculat după legile termodinamicii (tot vestita lege a doua) şi după evoluţia corpurilor radioactive „vârsta lumii" şi a găsit cifre aproximativ concordante şi în acord, de asemenea, cu claculele astronomilor; el situează momentul începutului Universului între 3×10^9 şi 5×10^{11} ani î.Hr.[85]. începutul acesta ar presupune o entropie nulă[86] şi o stare absolut omogenă, izotropă (unii astronomi postulează chiar un volum zero, un Univers redus la un punct), iar singurul eveniment care ar putea deranja această stare de echilibru absolut şi provoca un „început absolut", ar fi fie o creare *ab nihilo* în acord cu ideologiile sau teologiile celor mai multe religii, fie „un bobâmac iniţial", ruptură „improbabilă" de echilibru, dat de un demiurg din afară, dacă nu de Dumnezeu însuşi.

Chestiunea prezenţei Vieţii pe alte planete, a „pluralităţii lumilor locuite", după cum zicea Fontenelle, a dat şi va mai da prilej de speculaţii. Iată un exemplu de calcul ipotetic în legătură cu acest subiect:

Se poate estima că o stea dintr-o sută de mii are sistem planetar (asemenea Soarelui); că un sistem planetar din 100.000 are probabil fiinţe vii; că o planetă cu fiinţe vii din 100.000 a dat probabil naştere în cursul evoluţiei unei „specii omeneşti" tot atât de avansată (sau mai mult) decât a noastră. Rezultă de aici (ţinând seama de numărul probabil de galaxii) că există în Universul nostru nu mai puţin de 400.000 de planete locuite de fiinţe tot atât de avansate ca noi. Aceasta în ceea ce priveşte Universul finit al lui Einstein.

Întorcându-ne la incidenţele matematicii cu metafizica, am menţionat deja în alt capitol că teoria mulţimilor transfinite sugerează anumite aplicări în teologie, în mod deosebit legat de calităţile de infinitudine atribuite facultăţilor de percepţie, cunoaştere, prezenţă universală a Divinităţii (facultate între altele de a fi în acelaşi timp şi în orice moment în oricare punct al Universului, fiind vorba tot de Universul finit al lui Einstein şi de teoria Universului în expansiune). Cohortele nesfârşite de mulţimi, numărabile sau nenumărabile, care pot la rândul lor să se eşaloneze în trepte în număr transfinit, ne-au făcut aceste atribute, având şi ele caractere transfinite, mult mai uşor de înţeles. Aici se pune o altă problemă foarte interesantă, matematică şi metafizică totodată: este oare Timpul un continuu propriu-zis, aşa cum este „Marele Continuu" arhimedic al numerelor reale (acela pe care l-am atribuit spaţiului geometriilor asimilându-i punctele cu punctele reale de pe o dreaptă - cu punctele reale, de pildă, dintre 0 şi 1) sau este doar un continuu numărabil, ca cel al numerelor raţionale fracţionare. Trebuie să facem aici deosebirea între timpul psihologic

descris de Bergson, „durata psihologică" ce constituie ţesătura aparentă a conştiinţei noastre, şi între timpul ştiinţific, cel al spaţiului-timp al lui Einstein. Teoretic, acesta din urmă este identic cu o direcţie în spaţiu, iar noi îi atribuim astfel (poate arbitrar) o corespondenţă punct cu punct, o clipă pentru fiecare punct, cu conţinutul spaţial al numerelor reale. Însă problema se pune totuşi poate mai direct pentru timpul psihologic, care, deşi a inspirat mai mult sau mai puţin automat ideea unui şuvoi neîntrerupt (fluxul continuu aparent al conştiinţei noastre) ar putea fi alcătuit nu numai din elemente dense de durată (precum numerele raţionale) însă numărabile, ci chiar din elemente discontinue. În spaţiul însuşi, de altfel, ideea unei discontinuităţi continue a fost introdusă de discontinuitatea cuantelor de energie (cuante de acţiune a lui Planck), iar alegerea între cele trei posibilităţi (timp continuu, dens numărabil sau discontinuu) nu este, de fapt, rezolvată nici pentru timpul ştiinţific, nici pentru timpul psihologic, individual.

Am menţionat mai înainte teoria Universului în expansiune aşa cum a fost prezentată de către abatele Lemaitre. Se ştie că, după ce au constatat o restrângere progresivă către roşu a liniilor spectrului nebuloaselor, astronomii au explicat faptul presupunând că este vorba de un efect analog efectului Doppler-Fizeau pentru sunet (creşterea sau micşorarea înălţimii aparente după cum sunetul se apropie sau se depărtează); această ipoteză este întărită de primele rezultate obţinute de telescopul uriaş de la Polomar. Acest lucru înseamnă că nebuloasele par să se îndepărteze către marginile Universului einsteinian [un volum finit[87]], vitezele lor fiind, conform observaţiilor spectroscopice, proporţionale cu distanţele dintre nebuloase şi observator socotit centru (orice punct al volumului frontieră al unei hipersfere este un centru de simetrie pentru restul acestui volum). Or, va veni un moment când (la o distanţă de aproximativ 1750 de milioane de ani lumină) vitezele anumitor nebuloase o vor atinge pe aceea a luminii şi, chiar prin acest fapt, razele lor luminoase nu vor mai ajunge până la noi, vor fi părăsit universul nostru, doar dacă nu-i fac înconjurul pentru a se întoarce cu viteze progresiv descrescătoare. O altă dificultate a acestui caz limită, şi care sporeşte neclaritatea acestei situaţii ipotetice, este că la viteza luminii orice masă devine teoretic infinită fără să intre la socoteală şi o temperatură probabilă de zero absolut (-273°C 16 centigrad) la care moleculele şi atomii îşi pierd mobilitatea, dar dobândesc o conductibilitate electrică infinită.

Acest Univers mărginit şi, totodată, fără margini (asemenea suprafeţei unei sfere), fie că este sau nu în expansiune, ridică o altă problemă: nimic nu este împotrivă ca, dincolo de această limită confirmată de aberaţiile aparente ale proprietăţilor materiei şi ale

formulelor care le exprimă, să nu fie alte universuri metagalactice asemănătoare cu al nostru, în mod absolut independente de al nostru, neavând nici o legătură posibilă sau imaginabilă cu al nostru. Şi aceste universuri, fără legătură între ele, pot să fie la rândul lor în număr limitat sau în număr transfinit numărabil. Ne-am întors oarecum la situaţia de acum cincizeci de ani când se putea presupune logic că Universul este infinit (deoarece dacă ar fi finit, ce ar fi dincolo de el? vidul absolut, se presupunea, era oricum tot spaţiu; nu aveam pe atunci noţiunea de spaţii curbe). în acest caz, în mod logic numărul stelelor ar fi fost infinit. Şi se punea încă de pe atunci întrebarea: un infinit actual, concret, e oare cu putinţă? Cantor şi E. Borel ne-au scăpat de atunci de aceste scrupule, făcându-ne, ca să zicem aşa, să atingem cu degetul infiniturile actuale, numărabile şi nenumărabile, pe un mic segment de dreaptă. întorcându-ne la cosmologia noastră postensteiniană, dacă admitem un număr transfinit de alte universuri îndepărtate, numărul celor 400.000 de planete, posibil locuite, din calculul de mai înainte va fi înmulţit cu un cardinal transfinit de tipul Aleph Zero, iar numărul combinărilor posibile ridicat la puterea înspăimântătoare a continuului. După cum spune părintele Teilhard de Chardin, rezumând în mod miraculos teoria combinărilor:

„În Univers, tot ceea ce este cu putinţă se înfăptuieşte.“

Fizica matematică şi matematica pură se pare că ne-au adus, după cum lăsam să se prevadă, de la materialismul secolului al XlX-lea, reînnoit cu Lucreţiu, la concepţii apropiate de acelea ale lui Pythagoras; Eddington nu s-a temut să afirme că nimic în fizica şi cosmologia de astăzi (dând o mână de ajutor şi dr. Whittaker nu exclude ipoteza unui „Nous“ sau Logos universal înzestrat cu o inteligenţă transfinită; uscăciunea care, după temerile noastre, trebuie să fie rezultatul progresului cunoaşterii ştiinţifice s-a transformat într-un idealism la fel de transcendent ca cel al lui Platon şi foarte apropiat de el. îmi iau îngăduinţa, în încheiere, să inserez aici alte două cugetări, care se completează una pe alta, ale părintelui Teilhard de Chardin:

„Putem spune că... atât cât vezi cu ochii, Lumea din jurul nostru merge în derivă împinsă în sens opus de două curente împreunate, amândouă ireversibile: entropia şi viaţa”.

Şi:

„Bucuria de a-mi aduce măcar cu un atom obolul la rostuirea pentru veşnicie a unei Lumi: nimic altceva n-ar putea la urma urmei să-mi stârnească interesul. Să eliberez o infimă cantitate de absolut. Să slobod un pic din fiinţă, de-a pururi”

Trebuie în cele din urmă să-mi cer iertare unora că am introdus puţin din acest ideal într-o carte cu tendinţă ştiinţifică, altor cititori că am împănat-o cu cifre şi cu formule... dar la urma urmei era vorba

despre Număr. Nădăjduiesc oricum să fi dovedit că Mistica Numărului nu sfârşeşte în mod necesar în stepe îngheţate, ci, câteodată, în poieni voioase împodobite cu florile neaşteptate ale închipuirii şi ocrotite de frunzişul binevoitor al uriaşilor copaci milenari.

POSTFAŢĂ

„GEMAŢIE” ŞI GEMINARE

de

CORNEL MIHAI IONESCU

Oricât de „epurată” de scoriile realului sensibil i-ar fi apărut lui Matila Ghyka „metafizica” întemeiată pe aritmosofia pitagoreică[88], în virtutea căreia „totul este ordonat potrivit numărului”, oricât de „intens” ar fi fost „extazul”[89] produs de „mistica îngheţată a numărului pur”[90], un nucleu secret de carenţă şi angoasă fertilă face ca „sophia” să iasă din complezenţa narcisică a sinelui şi să aspire spre sine ca „iubire”[91], ca în desăvârşirea şi diofania cristalului să zvâcnească, ocrotit de o penumbră amniotică, un puls impur de viaţă organică, promisiune de febrilitate, efemer şi moarte; ca în miezul criptic al strălucirii formelor vii să opereze o pulsiune contrarie spre calmul „îngheţat” al materiei neînsufleţite; ca în cele mai desăvârşite opere de artă, veşnicia lor făgăduită să ia chipul duratei umane, adică al intermitenţelor amneziei şi circularităţii mimetice care o compromit.

Subtilul gânditor a intuit paradoxul fericit prin care în „rigiditatea cristalină şi abstractă a lui Pitagora” sălăşluieşte „înlănţuită” „o pulsaţie dinamică” ce va fi formalizată ca „simbol matematic al creşterii vii”[92].

Această intuiţie este cu atât mai revelatorie cu cât, în clima Parisului fin-de-siecle, începând din 1891, personalitatea lui Matila Ghyka s-a desăvârşit într-o cultură de extrem rafinament care aspira să „epureze” „unitatea întunecată şi adâncă” a „corespondenţelor” baudelairiene, chiar şi de cele mai rarefiate efecte de contingenţă ale „miresmelor, culorilor şi sunetelor (care) îşi răspund” încă în „pădurile de simboluri”[93]. „Demonul analogiei” din poemul lui Mallarme este un *antimimon pneuma*, un spirit gnostic, parodic şi antifrastic al numinosului care mai sălăşluieşte în „Templul Naturii" din sonetul lui Baudelaire. El a răsturnat „corespondenţa" celor multiple şi eterogene într-o criză a semiozei şi semnificaţiei, operând sub aparenţa fastă a „glorioasei Amintiri” (într-o vădită parodie a anamnezei platoniciene) ca sacru demoniac, „irecuzabilă intervenţie a supranaturalului”, care indica „angoasa sub care agonizează spiritul stăpân cândva (pe sine)”: „V-au cântat vreodată, pe buze, cuvinte necunoscute, zdrenţe blestemate ale unei fraze absurde?”[94] „Demonul" mallarmean expulzat din gloria „analogiei” cu Tatăl anihilează nu doar reziduurile

senzuale ale contingenţei, ci însuşi sensul creaţiei pe care, în spirit aproape gnostic, Fericitul Augustin o numea în sumbra viziune din opera sa târzie *regio dissimilitudinis* (tărâmul neasemănării). Iluzia „demonului analogiei" că ar suprima realul şi sensul este denunţată, printr-o supremă ironie a transcendenţei, de însăşi strategia antimimetică prin care devine prizonier al lumii şi raţionalităţii invers mimate. Memorabil efect de *Aufhebung* în opera unui poet faţă de al cărui „pretins hegelianism" Jacques Derrida îşi exprimă în mod limpede mefienţa[95].

Narcisismul exacerbat pare să-l salveze pe Domnul Teste de aporiile nebănuite ale soteriologiei gnostice. „Analogia abstractă", „purificată", în athanorul superbei lui ţeste, a eliminat orice reziduu de referenţialitate, pentru a se reflecta pe sine într-o autoscopie, disforică totuşi, pentru că, tot graţie infailibilului instrument teutonic al *Aufhebung*-ului, autareferenţialitatea este, în acelaşi timp şi în mod indecidabil, autoreferenţialitate, adică „umbră" a lumii eludate care tulbură luduş-ul hedonist al eului narcisic. „Cumplit este demonul analogiei abstracte! Ştiţi bine cât mă chinuieşte uneori!"[96] în „memoriile" Dlui Matila Ghyka, „afecţiunea impersonală" faţă de Valery şi sentimentul că se află în preajma „unui geniu la fel de universal şi de puternic ca Platon"[97] nu sunt străine de faptul că „amplele cunoştinţe matematice" ale poetului francez, „curiozitatea lui nelimitată", precum şi „dragostea pentru arte, în mod deosebit pentru arhitectură" i-au stimulat interesul pentru „estetica geometrică" elaborată de savantul român. Introducerea la Le nombre d'or(1931) exprimă profunda afinitate cu gândirea lui Matila Ghyka a celui care înălţase în Les charmes, arhitectura sonoră a „cântecului coloanelor", „fiice ale Numărului de Aur"[98], iar în dialogul platonician Eupalinos ou l'architecte încercase „să înlănţuie o analiză şi un extaz" în faţa „acestei stranii apropieri a formelor vizibile cu ansamblările efemere ale sunetelor succesive", „divină analogie" care vizează o „origine intimă şi universală", un „punct preţios"[99] asemeni unui „zeu" imanent „în propria-ţi came".

Mediatorul acestei convergenţe este Leonardo da Vinci, a cărui „metodă" a modelat geniul juvenil al lui Valéry[100], şi ale cărui desene au ilustrat tratatul De divina proportione (Veneţia, 1509) consacrat de matematicianul şi cosmograful Luca Pacioli „secţiunii de aur". Dedicaţia tratatului elogiază contribuţia lui Leonardo, iar capitolul al V-lea îl indică pe Pitagora drept predecesor al teoriei platoniciene din Timaios (53 e - 56 c) privitoare la cele patru corpuri geometrice derivate din triunghi, care au stat la originea celor patru elemente (tetraedrul (piramida) — foc; octoedrul — aer; icosaedru — apă; cubul — pământ). „Criptopitagoreicul Platon"[101], cum îl numeşte, în mod revelator, Matila Ghyka, inspiră acest climat spiritual

în care „ar/je-ul” este dublu şi schizomorf în formula clasică transmisă de Timaios: „într-adevăr înainte de aceasta, elementele erau fără proporţie şi fără măsură; focul, apa, pământul şi aerul aveau într-adevăr urme ale propriei lor naturi, dar erau toate în starea în care e de aşteptat să se afle orice lucru din care zeul lipseşte. Aceasta fiind natura lor în momentul când Demiurgul a început orânduirea lumii, cel dintâi lucru pe care el, Demiurgul, l-a făcut a fost să le distingă unele de altele cu ajutorul formelor şi al numerelor (subl. n.). Zeul le-a îmbinat cât mai frumos şi cât mai bine cu putinţă, aşa cum nu erau înainte; fie-ne aceasta, mai presus de toate, principiul pe care să ne întemeiem mereu gândul” (53b)[102]. Sau în forma paradoxală, sugerată iniţial, a „creşterii homotetice” a formelor[103] artistice şi naturale (organice şi minerale) în jurul unui nucleu însufleţit de un „puls” contradictoriu (durată umană în inima eternităţii capodoperei; pulsiune organică în „abisul” cristalului; regresie spre inanimat în centrul formaţiunii organice vii), paradox care generalizează procesul de „mitoză” (de germinare a celulelor)[104] aflat la originea tuturor fenomenelor de creştere definibile prin conversiuni topologice întemeiate pe invariantul „numărului de aur”.

În viziunea lui Matila Ghyka, „punctul”, „monada geometrică”, „polul”, „oul absolut din care decurg nu doar numerele ci şi formele regulate reprezentate de numerele figurate”[105] par să nu cunoască dedublarea. „Celula primordială”, „protozoarul” geometric[106], „polul de creştere” nu cunosc „mitoza”, iar „gemaţia triunghiulară” este „continuă” întrucât la originea ei nu stă nici o geminaţie[107]. Dar aşa cum cita frecvent pasajul din Timaios în care Demiurgul discerne „formele” şi „numerele” înlăuntrul „principiului”, Matila Ghyka îşi amintea afirmaţia lui Hegel despre deceptivul „caracter enigmatic al determinării cu ajutorul numărului”, explicabil prin carenţa lui conceptuală. „Numărul, scrie Hegel în capitolul din Prelegeri de istorie a filozofiei, consacrat lui Pitagora şi pitagoreicilor, este continuitatea cea mai moartă, lipsită de concept, indiferentă, lipsită de opoziţie... Astfel, numărul nu este în chip nemijlocit concept, — el este extrema gândului, a conceptului în suprema sa exterioritate, în modul cantitativului, al diferenţei indiferente”[108].

Pentru pitagoreici, ne reaminteşte Aristotel, „elementele numerelor sunt elementele tuturor lucrurilor şi întreg Universul se reduce la număr şi armonie”[109]. în schimb, „criptopitagoreicul Platon” înscrie numărul într-o suspensie ninistă care dublează distincţia dintre „idei” şi „numere”.

„Platon, scrie Aristotel, mai afirmă că, între lucrurile sensibile şi Idei mai există, ca intermediare, Obiectele matematice, deosebite de lucrurile sensibile prin aceea că sunt veşnice şi neschimbătoare, iar de Idei prin aceea că ele există într-o pluralitate indefinită de exemplare

asemănătoare, pe când fiecare Idee există doar într-un singur exempar”[110]. în epoca de formare a personalităţii lui Matila Ghyka, în Franţa, Henri Bergson gândea „mitoza” sub forma „tendinţelor divergente şi complementare”, ale „creşterii” şi, într-o formă pură de pitagoreism preplatonician, gândea, în *L’ăvolution creatice* (1907), „posibilitatea unei geneze simultane a materiei şi a inteligenţei” şi, în consecinţă, ipoteza unei „geometrii inerente materiei”. „Astfel, spune el, anterior geometriei savante, există o geometrie naturală ale cărei limpezime şi evidenţă le depăşesc pe cele ale celorlalte deducţii”[111]. Gândirea lui Bergson (cu excepţia „elanului vital”) constituie un stimul preţios în procesul prin care Matila Ghyka depăşeşte ceea ce el numeşte „faza determinismului absolut”[112] pentru ca excluzând „metafizica”, urmărind doar indicaţiile fizicii şi termodinamicii, fără a introduce nici o ipoteză „vitalistă”, să afirme existenţa „diferenţei transcendentale dintre materia organică şi cea inorganică” şi să elaboreze, cu ajutorul „numărului de aur”, „testul matematic al transcendenţei vieţii”[113]. Transcendental al „gemaţiei”[114] şi, deopotrivă, al geminării naturii (organice şi anorganice) şi a naturii şi artei.

---

[1] Specialist în măsurători de terenuri

[2] Nicomah din Gerasa (colonie grecească din Palestina, intemeiată de către acei geronteV, veterani ai lui Alexandru),zis „Pitagoreicul”, a trăit în secolul I al erei noastre; a studiat pesemne la Alexandria. Două dintre lucrările sale au ajuns in intregime pană la noi: un „Manual de Armonie” şi „Introducere in Aritmetică” (zisă *lsagoge)* o mare parte din *Theologumena Arithmeticae* (Mistica Numărului) ni s-a păstrat datorită unei compilaţii realizate de Iamblichos (Roma, sec. IV i.Hr.), autor al faimoasei *Vieţi a lui Pythagoras.* Traducerea cea mai vestită (în latină) a *Isagogii* este cea a lui Boethius (Roma, sec. V) care a exercitat o influenţă enormă de-a lungul intregului Ev Mediu.

[3] Moderatus din Gades (pitagoreic de marcă şi matematician din epoca lui Nero), scrie (citat de Porphyrios): „Pitagoreicii numesc «Unu» ideeade identitate, de unitate,de egalitate, de concordie şi de simpatie în lume, şi «Doi» ideea de «altul», discriminare, inegalitate”.

[4] Corelaţia, impusă autoritar de către pitagoreici şi de către filosofii chinezi, între numerele pare şi principiul feminin, mai întâi datorită facultăţii de divizare prin sciziparitate a acestor numere, este de altfel îndreptăţită în biologie în care principiul masculin este asociat, desigur, cu numerele impare, iar principiul feminin cu numerele pare, în mod deosebit în relaţiile numerice care apar în determinarea sexului.

[5] Să-I citäm din nou pe pitagoreicul Moderatus din Gades: „Pitagoreicii numesc „Unu“ ideea de identitate, de unitate, de egalitate, de concordie şi de simpatie în Lume, şi „Doi“ ideea de altul, discriminare, inegalitate”

[6] Era cufu a cărui reţetă ne-a transmis-o Plutarh: miere, vin, stafide, căprişor, răşină, smirnă, lemn de trandafir, seselie, fistic, smoală, obligeană, ştevie, ienupăr, cardamom şi mintă, şaisprezece alimente.

[7] Lucian (*Pro lapsu inter salut*) „Pentagrama pe care o adoptau ca simbol iniţiaţii era pentru ei emblema sănătăţii..” Muzeul din Basel posedă un disc de alabastru din epoca alexandrină (formă pentru prăjituri), având încrustată pentagrama care are în cele cinci vârfuri chiar literele UGEIA.

[8] Raportul între diagonala pentagonului regulat (latura pentagramei) şi latura sa este egal cu raportul Secţiunii de Aur:

$$\emptyset = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618$$

[9] Lucian în *Le marchi des âmes*, Pythagora (către Agorastes): „Vedeţi? Ceea ce luaţi drept zece este un triunghi perfect şi jurământul nostru“.

[10] „Puneţi în ordine denumirile şi definiţiile, răspunse maestrul. Când denumirile sunt incorecte, raţionamentele sunt incoerente; când raţionamentele sunt incoerente, treburile merg pe dos; când treburile merg pe dos, uiţi să cultivi muzica şi riturile, când muzica şi riturile sunt uitate, pedepsele sunt disproporţionate în plus sau în minus, şi atunci poporul nu mai ştie încotro s-o apuce, nici ce să mai facă“.

[11] Comodulaţia, acordul dintre proporţii,între părţile ansamblului şi între fiecare parte şi ansamblu.

[12] „Cei vechi socoteau desăvârşit numărul Zece... izvorât din monadă..”

[13] „Conflictul este cauza zămislitoare a toate”

[14] „Acest templu este asemănător cerului în toate proporţiile sale“. (Inscripţie pe un relief din templul lui Ramses al III-lea, muzeul din Cairo.)

[15] O frânghie cu noduri de 12 unităţi aşezată cu ajutorul a trei ţăruşi în lungime de 3-4-5 forma unghiul drept; umbra cea mai scurtă a unui ţăruş arăta la amiază direcţia nord-sud.

[16] Triunghiul 3-4-5 era folosit şi de arhitecţii asirieni, ahemenizi şi mai apoi sasanizi pentru a-şi fixa cupolele eliptice.

[17] De pildă X 21 = 3 x 7 dă $29^2 = 21^2 + 20^2$, proporţiile piramidei lui Snofru de la Dashar.

[18] lamblichos (*Vita Pit.*) scrie: „Hippasos era unul dintre pitagoreici, întrucât a fost primul care a publicat construirea sferei cu 12 pentagoane (dodecaedrul), a pierit într-un naufragiu din cauza acestei nelegiuiri, dar a primit creditul moral al acestei descoperiri când, de fapt, îi era pe drept datorată Iui (Pythagoras)". Proclus îi atribuie lui Pythagoras construirea celor cinci corpuri regulate.

[19] Celelalte şapte tipuri de proporţii (în plus faţă de cele 3 clasice) sunt:

$\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$ ca 3, 5, 6 ; $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{a}$ ca 6, 8, 9 ; $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$ ca 3, 5, 8 ; $\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$ ca 2, 4, 5 ; $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$ ca 6, 7, 9 ; $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$ ca 1, 4, 6 ; $\frac{b-a}{b-a} = \frac{b}{a}$ ca 4, 6, 7.

[20] Iată ceea ce putem numi „fraza cheie“ a lui Vitruviu în care apar

proporţia, symmetria şi euritmia:

„Simetria (*symmetria*) constă în acordul de măsură între diferitele elemente ale operei şi între aceste elemente luate separat şi în ansamblu... Le fel ca în corpul omenesc... ea decurge din proporţie - aceea pe care grecii o numesc „Analogia" - consonanţă între fiecare parte şi întreg... Această simetrie este reglată prin modul, etalonul de comună măsură (pentru opera avută în vedere), ceea ce grecii numesc „posotes" („numărul")... Când fiecare parte însemnată a edificiului este în plus şi potrivit proporţionată, datorită acordului între înălţime şi lăţime, între lăţime şi adâncime, şi când toate aceste părţi îşi au locul în simetria totală a edificiului, obţinem euritmia."

Vedem astfel că prin *symmetria* grecii înţelegeau ceva cu totul diferit de simetria noastră modernă (cuvântul şi-a pierdut sensul logic către sfârşitul secolului al XVII-lea); nu era vorba de receptarea unor elemente identice de o parte şi de cealaltă a unui arc sau plan de simetrie, ci de o „comodulaţie" reglată de o proporţie între ansamblu şi întreg. Tot astfel *modulul* în fraza lui Vitruviu pare să nu fie împărţirea alicotă a unei unităţi de mărime, ci un modul-raport, raportul caracteristic al proporţiei celei mai însemnate (analogia).

[21] Este metoda definită de Theon din SmirnaØ

[22] Aceasta rezultă dintr-o teoremă generală a profesorului Nathan Altshiller-Court (de la Universitatea din Oklahoma), prin care dovedeşte că în ecuaţia $x^2 = x + a$, rădăcina cea mai mare $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ este la limită egală cu $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ şi rădăcina cea mai mică este egală la limită cu $\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a}{\ddots}}}}$

[23] Acest cuvânt vine de la Al. Khowarazmi (matematician arab din secolul IX, autor al *Algebrarului*, „transpunere"); el înseamnă acum: orice procedeu matematic constând în a trece de Ia un eşalon la următorul printr-o iteraţie nedefinită. În ciuda afinităţii fonetice cu ritmul şi logaritmul (a cărui anagramă este) nu este în nici un fel înrudit cu ele.

[24] Formula lui Schläfli sau formula lui Euler generalizată pentru un spaţiu cu n dimensiuni divine

$$\sum (k = 1, 2, 3 \ldots n)(-1)^k A^k = 1$$

A^k reprezentând numărul de elemente cu k dimensiuni.

A^n = 1 este chiar politopul, A° numărul vârfurilor, (-1)° = 1.

[25] De fapt, hexagonul este reprezentat în spaţiul cu trei dimensiuni prin trei corpuri solide înrudite.

1° Cuboctaedrul (moşteneşte de la hexagon proprietatea relativă la egalitatea între baza circumferinţei circumscrise şi latura hexagonului).

2° Poliedrul semiregulat al lui Kelvin (24 de vârfuri, 36 de muchii, 14 feţe dintre care 8 sunt hexagoane şi 6 pătrate, obţinut împărţind în trei segmente egale fiecare muchie a octaedrului şi urmând între ele punctele astfel obţinute). Acest corp moşteneşte de la hexagon proprietatea de a umple planul (aici spaţiul) fără interstiţii.

3° Prisma hexagonală regulată (două feţe hexagonale paralele, şase feţe pătrate cu aceeaşi latură), moşteneşte aceeaşi proprietate de la hexagon, adică formează o echipartiţie perfectă a spaţiului.

[26] Dimpotrivă, în geometria neeuclidiană a lui Riemann, spaţiul poate fi umplut fără interstiţii cu tetraede regulate.

[27] Această prezenţă neaşteptată a Secţiunii de Aur şi a pentagonului sau decagonului se datorează faptului că deja în spaţiul cu trei dimensiuni Secţiunea de Aur uneşte nu numai dodecaedrul şi icosaedrul, ci le uneşte cu celelalte trei poliedre regulate după cum enunţase Campanus din Navara în secolul al XlI-lea.

[28] Aceia dintre cititorii mei care au studiat geometria descriptivă îşi amintesc că erau două categorii de elevi, cei care „vedeau în spaţiu şi îşi puteau închipui soluţia unei probleme de intersecţii de solide" şi cei care „nu vedeau în spaţiu" şi preferau să găsească aceste soluţii prin formule de analize.

[29] O anumită confuzie rezultă din faptul că hipercubul C_8 este numit oficial octaedroid din cauza celor 8 celule ale sale (cuburi), fără să fie din familia octaedrului, hiperoctaedrului (C_{16}) etc.

[30] În limba franceză expresia *tohu-bohu* are următoarele sensuri: 1° stare a pământului în haosul primitiv; 2° dezordine, harababură, hărmălaie (n.t.).

[31] „Cucerirea iudaismului de către doctrina pitagoreică a început cu mult înaintea Epocii romane. Toate realizările însemnate ale literaturii evreieşti din Alexandria romană sunt legate de tendinţa pitagoreizantă" (Isidore Levy, *La legende de Pythagore*). Şi: „Iudaismul alexandrin, fariseismul ... şi esenismul oferă, în comparaţie cu mozaismul biblic, caractere noi, semne ale cuceririi lumii evreieşti de către concepţiile a căror expresie narativă şi mijloc de vehiculare a fost legenda lui Pitagora"(*Id.*)

[32] Conform formulei generale $\frac{n(n+1)}{2}$, aici $\frac{16X17}{2}$ = 153 (remarcat de Robert Eisler)

[33] Magia Neagră sau *Goeţia* cheamă demonii şi alte spirite malefice în nădejdea de a le da în robie, prin *Necromanţie*, sufletele morţilor; slujba neagră face parte din ritualul Goeţiei. Magia Albă sau Theurgia nu are legături decât cu spiritele binevoitoare sau cu forţele naturale. Definiţia *lato-sensu* a Magiei: tot ceea ce eliberează o forţă sau o captează. O operaţie dinamică, captare sau emitere controlată de forţe, este întotdeauna magică... pentru cei care nu o înţeleg. Deseori magia de astăzi este ştiinţa de mâine. Ritul, încantaţia, ritmul joacă un rol important în magie (vezi *Les Rites ne sont que la mise en action des Symboles*, Comte de Larmandie.)

[34] Cuvântul „microcosmos" este întâlnit pentru prima dată într-un text de Democrit din Aldera. Totuşi, o biografie grecească a lui Pitagora îi atribuie născocirea cuvintelor macrocosmos şi microcosmos.

[35] Aceasta era şi părerea Sfântului Augustin pe care o aplica în mod deosebit Esteticii: „Raţiunea, întorcându-se spre domeniul Vederii adică Pământul şi Cerul, bagă de seamă că în lume frumuseţea place vederii, în frumuseţe formele, în forme măsurile, în măsuri numerele." (*De Ordine*)

[36] De unde adjectivul, „bombastic”. Paracelsyus nu a meritat acest epitet căci se pare că a fost şi un mare medic. Terapeutica lui era bazată pe o teorie „armonică" a fiziologiei (asemănătoare cu aceea a lui Platon), orice stare patologică fiind cauzată, după părerea lui, de o ruptură de armonie, de o „disonanţă”. Aparatul american de diagnosticat, bazat pe observarea radiaţiilor corpului omenesc, a diferitelor sale organe şi a frecvenţelor lor, precum şi metoda de tratament corespunzătoare se întemeiază pe acelaşi principiu.

[37] Ultim ovator al lui Hermes-Thot, sau Mercur cu caduceul (şarpe) prin mijlocirea nebulosului Hermes Trismegistul (tris Megistos, Megist Ophiel, Mephistophels) Agrippa numeşte spiritul lui Marcus Ophiel şi atât.

[38] Toate acestea au fost împrumutate şi de Franţa prin Campanionaj, care a supravieţuit desfiinţării corporaţiilor de către revoluţie.

[39] Să notăm că Agrippa îl numise pe Creator „Eternul Maestru al Creaţiei".

[40] Herodot scrie în legătură cu obligaţia pitagoreicilor de a se îmbrăca cu haine din in: „Acest lucru este conform cu ceremoniile orfice... care sunt aceleaşi cu cele egiptene şi pitagoreice”.

[41] Ordinul Sfântul Ioan din Ierusalim, cândva rival cu acela al Templierilor, există încă în Anglia şi în Germania având ca ramură catolică Ordinul Suveran de Malta.

[42] Cercetări recente în oraşele moarte din Guatemala par să dovedească faptul că mayaşii din Vechiul Imperiu ar fi cunoscut atât folosirea lui 0, cât şi poziţia cifrelor în numeraţie.

[43] Am putea, de asemenea, pleca într-un mod şi mai logistic făcând din principiul identităţii definiţia cuvântului „fiinţă”.

[44] Teorema lui Gauss rezultă din faptul că ecuaţia $x^n - 1 = 0$ îşi are rădăcinile reprezentabile printr-o notaţie euclidiană (combinări de rădăcini pătrate) numai dacă este îndeplinită una dintre cele trei condiţii enunţate mai sus.

[45] În mulţimile ordonate deosebim, de asemenea, pe acelea în care (ca şi pentru ordinea întregilor sau a numerelor reale) două elemente oarecare sunt comparabile şi cărora li se zice total ordonate; printre acestea din urmă găsim mulţimile bine ordonate în care orice submulţime, ca şi întregii mai mari decât 0, are un element mai mic. Orice mulţime ordonată finită este de altfel bine ordonată.

[46] Calculatorul ENIAC a calculat numărul π cu 2035 zecimale în 70 de ore.

[47] Într-adevăr, un număr întreg este pentru aceştia „clasa tuturor claselor care au o corespondenţă univocă şi reciprocă cu o mulţime finită dată“.

[48] Condensarea pragmatismului: „Ceea ce este adevărat este folositor”; a hedonismului: „Ceea ce este adevărat este plăcut“; a esteticii: „Ceea ce este adevărat este frumos”.

[49] În general, tantologia este produsul unei concluzii evidente care decurge din premise; aceasta implică de multe ori repetarea în termeni diferiţi a aceleaşi idei.

[50] Iată 5 „formule moleculare” (p şi q sunt propoziţii)

$[pV (qVr)] \supset [(p Vq)Vr]$

$(pVq) \supset p$

$q \supset (pVq)$

$pVq \supset qVp$

$(q \supset r) \supset [(pVq) \supset (pVr)]$

[51] Cititorul va fi observat înţelesurile deosebite ale cuvântului semantic (semantics) în America şi în Franţa. În America, după Şcoala Pozitivistă, semantica este unul din cele 3 domenii ale logicii sintactice (sintactic, semantic, pragmatic), cel în care apar relaţiile dintre subiect şi cuvinte.

[52] Este momentul să amintim încă o dată sfatul pe care Confucius i l-a dat prinţului Ling, de care am pomenit în primul capitol, şi care începe astfel: „Puneţi în ordine denumirile. Când denumirile sunt incorecte, raţionamentele sunt incoerente ...”

[53] Două definiţii ale Adevărului. Whitehead: „Adevărul este identificarea aparenţei şi a realităţii”. Sfântul Toma: „Verum est adequatio rei et intellectus”, Adevărul este identificarea (sau suprapunerea) lucrului real şi a intelectului. Şi cea a preotului Mac Murrin: „Domeniul Adevărului este mai întins decât cel al verificării. Domeniul faptelor este mai întins decât cel al experienţei şi îl cuprinde. O frază ce nu poate fi verificată poate fi adevărată deoarece corespunde unui fapt: „Aceasta este împotriva etichetelor şi dogmelor celor mai sfinte ale logicienilor pozitivişti”.

[54] Numeraţia în baza 2 se supune aceloraşi legi ca numeraţia într-o bază oarecare, orice număr poate fi reprezentat aici prin $a \times 2^n + b \times 2^{n-1} + c2^{n-2} + \cdots + 1 \times 2 + k$, a, b, c... 1, k fiind mai mici decât 2, adică egale cu 0 sau cu 1.

Numărul 243, de exemplu, din notaţia noastră zecimală este aici $1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$ sau, în notaţie binară, se va scrie 11110011.

Cifrele 0, 1, 2 ... 9 din sistemul zecimal vor fi reprezentate de 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001.

[55] Voi nota aici, pentru ţinere de minte, cealaltă explicaţie materialistă a vieţii, este vorba de semimaterialismul sau hylozoismul lui Haeckel, după care orice atom de materie ar conţine o bucăţică infinitezimală de viaţă sub formă de „iritabilitate”; integrarea reală sau aparentă a acestor atomi de psihism ar produce, ca nişte psiheuri colective iluzorii, „fiinţele pseudoconştiente” organizate. Dacă această teorie ar fi adevărată nu ar exista nici un motiv pentru ca psihismele infinit de mici dintr-un cristal, ba chiar dintr-o pietricică, să nu se integreze producând cristale pseudoconştiente. Tot aşa stânci pseudogânditoare, munţi iritabili.

[56] Norbert Wiener, deşi imparţial, pare totuşi că sugerează calitatea transcendentă a judecăţii vii comparată cu pseudopsihismul maşinii în fraza eliptică: „Informaţia este entropie negativă”.

[57] Iar robotul care joacă dame este uneori, se pare, în stare să trişeze când vede că pierde.

[58] „Finnegan's Wake”, numită mai întâi „Work in Progress”, ultima carte a lui James Joyce, puzzle etimologic inspirat din Rabelais; el amestecă rădăcinile şi asociaţiile de idei, de nume proprii şi comune, din vreo 15 limbi vechi şi moderne.

[59] Să notăm că cele 3 straturi de celule care grupează şi pun în ordine

impulsurile din cortex şi creează percepţii sunt în esenţă asemănătoare cu anumite organe ale maşinilor electronice.

[60] Numerele sunt traduse de maşină în sistemul binar.

[61] Topologia se ocupă de proprietăţile figurilor care rămân invariante în timpul transformărilor continue. Mai este numită în glumă: geometria straturilor de cauciuc deformabile.

[62] Trecem de la ecuaţia traiectoriei unei raze luminoase în spaţiul obişnuit, $d_s^2 = c^2\Delta t^2$ sau $\sum \Delta x_v^2 \ (v = 1,2,3) = c^2\Delta t^2$ la $\sum \Delta x_v^2 = \sum \Delta (x_v')^2 = c^2\Delta t^2$ (pentru două sisteme K şi K^1, în mişcare uniformă unul faţă de celălalt) apar, prin 1 = ct şi $x_4 = 1\sqrt{-1} = i_1$ la $\sum \Delta x_v^2$,$(v = 1, 2, 3, 4) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = 0$. Atunci când nu mai este vorba de ecuaţia simplă a unei raze de lumină, ci de intervalul între două evenimente din spaţiul-timp cu patru coordonate, pătratul intervalului este dat tot de $s^2 = \sum \Delta x_v^2 \ ,(v = 1,2,3,4) = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2$

[63] G_s's sunt coeficienţii termenilor intervalului d_s (distanţa generalizată) între două puncte în spaţiul cu patru dimensiuni atunci când este reprezentat sub forma cvadratică:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + g_{44}x_4^2$$
$$+2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{14}dx_1dx_4$$
$$+2g_{23}dx_2dx_3 + 2g_{24}dx_2dx_4 + 2g_{34}dx_3dx_4$$
$$G = -2(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 + k_2k_4 + k_3k_4$$

(Permutările sau combinările nu sunt niciodată prea departe.)

K_1, K_2, K_3, K_4 sunt inversele razelor principale de curbură din spaţiul cu patru dimensiuni (curbat într-un spaţiu cu 5 dimensiuni). G este invariantul principal al formei cvadratice $g_{\mu\nu}\ dx_\mu\ dx_\nu$.

[64] Avem, de asemenea, $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$, în care λ este constanta cosmică din mecanica ondulatorie.

[65] Einstein stabilise şi o formulă care dovedea că viteza relativă a două corpuri ce se mişcă în sens contrar cu viteze aproape egale cu viteza luminii rămâne totuşi mai mică decât viteza luminii. Formula de compunere a vitezelor este:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1V_2}{c^2}}$$

dacă V_1. sau V_2 = c , atunci V = c; dacă $V_1 = V_2 = c$ atunci V este egal tot cu c.

[66] Un alt exemplu de efecte materiale neprevăzute (pentru bunul simţ) şi derivate dintr-un principiu paradoxal: tehnica rachetelor (de tipul V_2) şi a avioanelor-rachetă provine în întregime din principiul abstract al acţiunii şi al reacţiunii conceput de Newton.

[67] „Porţiunea de materie pe care o denumim şi pe care o putem urmări este o proiecţie a conştiinţei noastre individuale”. (P. Langevin).

[68] Altfel spus: invariantul într-un organism este funcţia, tema. Ruyer, de altfel, ca mai toţi savanţii antimaterialişti de astăzi, respinge eticheta de *vitalist*.

Însă el scrie:

„Anatomia este ordonată atât în timp cât şi în spaţiu (ceea ce nu este adevărat pentru *Gestalt*)... ontogeneza este pregătitoare a viitorului... Un peşte adult este hidrodinamic deoarece este „pregătit“, iar nu modificat în firicele de apă. Un troian de zăpadă modificat de vânt nu este o fiinţă, nu este o formă adevărată cu un potenţial”.

[69] „Corpurile anorganice cresc prin „aglutinare”... moleculele noi care, una câte una, strat după strat, se juxtapun progresiv ... astfel încât să intre în legătură cu cel mai mare număr cu putinţă de particule limitrofe... (Fiecare moleculă) se va fixa în locul la care poate ajunge cât mai uşor; dacă nu există loc gol disponibil ea va ocupa poziţia cu o energie potenţială minimă faţă de vecinele sale deja adunate, energia sistemului fiind atunci în aşa fel distribuită încât să nu mai rămână nici o forţă rezultantă care să poată cauza o deplasare...

Dimpotrivă, corpurile organice cresc prin „intususcepţie“ sau „îmbibare“, aşa cum o bucată de gelatină poate creşte în apă, lichidul pătrunzând în toată substanţa ei...“

[70] Am să reproduc aici un fragment din cartea mea „Estetica proporţiilor” pentru a sublinia diferenţa dintre o forţă exterioară şi una interioară care acţionează asupra unui sistem închis.

„Exemplu concret de acţiune exterioară: pe o masă sunt puse un pendul care oscilează şi o eprubetă în care are loc o reacţie chimică; pot considera că masa, eprubeta şi pendulul (ar trebui spus combinarea „pendul glob-terestru” pentru a introduce corect funcţia potenţială) ca un sistem aproximativ izolat. Principiul minimei acţiuni, aplicat în forme potrivite, permite să se prevadă tot ce se va întâmpla atâta timp cât nu va interveni nici o forţă exterioară. Dacă un observator din cameră dă un bobâmac pendulului sau toamă acid sulfuric în eprubetă sau dacă o pală de vânt răstoarnă lucrurile din cameră, atunci sistemul pendul-masă-eprubetă se va abate de la ecuaţiile hamiltoniene stabilite mai înainte deoarece intervenţia acestor forţe nu a fost prevăzută de aceste ecuaţii în care, datorită „regulilor jocului”, nu am introdus decât date rezultând din energii potenţiale, cinetice, chimice etc., care aparţineau sistemului masă-eprubetă-pendul. Or, o discordanţă asemănătoare s-ar fi produs dacă sistemul ar fi cuprins un vas cu peşti roşii sau dacă eprubeta conţinea o cultură microbiană.”

[71] *Essai sur Ies Rythmes Toniques du Frangais*, Les Presses Universitaires de France.

[72] *Principes d’Esthătique* (Boivin et Cie).

[73] Am notat deja că disocierea limbajului operată de Pius Servien în aceste două domenii, limbajul ştiinţelor şi limbajul liric, permite să se rezolve fără greutate multe probleme de logică simbolică şi de semantică în care se împotmoliseră logicienii pozitivişti (Carnap etc.).

[74] „Vei afla atât cât îi este îngăduit unui muritor, că Natura este în orice punct al ei, asemenea sieşi”.

[75] Intervalul dintre două note oarecare, vecine sau nu, din aceeaşi gamă, *Fa Sol* de pildă, are drept măsură fracţia, în acest caz 9/8, cu care trebuie înmulţit numărul de perioade (vibraţii complete) ale sunetului Fa pentru a

obţine sunetul Sol (dacă numărul de perioade ale sunetului Do este luat ca unitate, vom vedea mai departe că numărul perioadelor lui Fa este 4/3, cel al sunetului Sol 3/2; 9/8 × 4/3 = 3/2). Acest interval *Fa-Sol* sau 9/8 se numeşte ton întreg. Urechea atribuie intervalului muzical astfel definit (raportul frecvenţelor a două sunete) un caracter care nu depinde de poziţia celor două sunete pe scara muzicală.

[76] Intervalul este raportul frecvenţelor sau al lungimilor corzilor vibratorii (aceste elemente sunt invers proporţionale) dintre două note. O notă a este în cvinta unei note b (a şi b sunt frecvenţe) atunci când a × 3/2 = b.

[77] Găsim atunci proporţiile:

Toate aceste şiruri sunt de tipul $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c-b}{b-a} = \emptyset$ din care termenul necunoscut (b sau c) se obţine prin

$$b = c - \frac{c-a}{\emptyset} \; sau \; c = b\emptyset^2 - a\emptyset \; cu \; \emptyset^2 = 2{,}618 \, , \frac{1}{\emptyset} = 0{,}618$$

[78] Câteva dimensiuni:

Diametrul atomului (L. de Broglie) = 1 mm/10.000.000 = lcm x 10^{-8}

Limita de vedere a microscopului electronic = 1 cm × 10^{-6}

Lungimea elementului de virus al mozaicului tutunului: 1,28x10^{-6} cm

Lungimea elementului de virus al grupei: 12x10^{-6} cm.

[79] Să notăm că s-a reuşit să se vadă zonele cu ajutorul microscopului electronic.

[80] Dacă se compară diametrul nucleului cu acela al unui bob de mazăre (1 cm), raza atomului de hidrogen va fi de 500 km, iar diametrul electronului planetar de l0m.

[81] Şcoala fizicienilor se bazează pe faptul că retina are nişte zone esenţiale acordate în mod special la roşu, la verde şi la albastru,culori cu care se pot compune toate celelalte, în timp ce alegerea şcolii artiştilor se acordă în mod mai firesc cu instinctul şi tehnica pictorilor.

[82] Geometria analitică, care a făcut să fuzioneze algebra cu geometria, nu a fost studiată separat în această lucrare; am presupus că măcar principiul său era cunoscut cititorului. Orice curbă poate fi reprezentată printr-o funcţie de tipul: y = f(x) generalizat.

[83] În California, doctorul sau mai degrabă doctoriţa Brown, ale cărei aparate le-am putut mânui în deplină libertate, a construit între altele un instrument care opreşte pe loc hemoragiile unui bolnav aflat chiar la mare distanţă; se pune în circuitul instrumentului o picătură uscată din sângele lui. Acest aparat a primit medalia de aur a institutului Rockefeller şi este folosit cu succes în unul din marile spitale din Chicago. Voi termina amintind un alt instrument (brevetat de dr. Brown) care, operând tot cu picătura de sânge a unui bolnav absent, realizează o fotografie pozitivă, luată din interior, a ţesuturilor moi din organul afectat.

[84] Profesorul Schrodinger însuşi, fără să fie suspectat de tendinţe teleologice sau vitaliste, admite că pentru unele particule, cum este electronul, fiecare observaţie nu este decât un eveniment izolat, „chestiunea identităţii nu are cu adevărat şi în mod real nici un sens“. în ultima sa carte (*Science and*

Humanism, Cambridge University Press) scrie: „Materia este o imagine în spiritul (mind) nostru, spiritul este astfel anterior materiei (în ciuda straniei dependinţe empirice a proceselor mele mentale de datele fizice oferite de o anumită porţiune de materie, creierul meu)".

Corpul omenesc, de altfel, dată fiind distanţa dintre electroni, atomi şi nucleele lor, este în realitate gazos; numai viteza de vibraţie a moleculelor şi atomilor dă iluzia opacităţii şi durităţii. Corpuri cu adevărat solide sunt satelitul lui Sirius numit „piticul alb", care are o densitate de greutate de o tonă pe un centimetru cub şi un alt „pitic alb" a cărui densitate este de vreo câteva mii de ori mai mare.

P. Langevin: „Porţiunea din materie pe care o etichetăm şi pe care o putem urmări este o proiecţie a conştiinţei noastre individuale."

[85] Vârsta Pământului solid ar fi în jur de 2 × 10^9 ani; apariţia vieţii (după fosile) ar data de vreo 500.000.000 de ani, cea a Tarsioidului lemurian, strămoşul lemurienilor, al maimuţelor antropoide şi al omului de 55.000.000 de ani, cea a raselor omeneşti deja diferenţiate de 1.000.000 de ani. Sinantropul (hominid) din Pekin ar data de 500.000 de ani î.Hr.

[86] Entropia este energie degradată, de joasă tensiune. Dacă notăm entropia cu H, avem: H = dc/T dc fiind cantitatea de căldură degajată într-un interval de timp infinit de mic, T temperatura absolută a sistemului în acel moment. Avem, de asemenea: dH/dt întotdeauna pozitiv în materia neorganizată.

[87] Acest volum este volumul curb cu trei dimensiuni care formează frontiera sau „suprafaţa frontieră" a unei hipersfere cu patru dimensiuni. Se poate calcula formula $2ji^2R^3$, R fiind raza hipersferei Universului. R a fost calculat prin diverse metode; Einstein găsise 1000 de milioane de ani lumină (1 an lumină este egal cu 10.000 de miliarde de kilometri), de Sitter 1750 de milioane de ani lumină; o altă aproximaţie este de 5000 de milioane de ani lumină. Cifra 1750 de milioane este interesantă deoarece este distanţa la care viteza nebuloaselor recesionare devine egală cu cea a luminii. Îl las pe cititor să aleagă raza şi să calculeze volumul finit al Universului în ani lumină cubi.

[88] *Philosophie et mystique du nombre*, p. 7, Payot, 1978.

[89] Ibid.,p. 50.

[90] Ibid., p.9.

[91] Doxografii susţin că Pitagora a fost primul grec care a renunţat la prezumţiosul termen sophos (înţelept) şi l-a folosit pe cel de la philosophos (prieten al înţelepciunii) pentru a numi, în chip mai „orthothetic" şi mai „cratylean" statutul real al gânditorului.

[92] *Philosophie et mystique du nombre*, op. cit., p. 27.

[93] Cf. sonetul *Correspondances* din volumul *Les Fleurs du Mal* (1857).

[94] Stéphane Mallarmé, *Le démon de l'analogie* din volumul *Divagations* (1897).

[95] „Desigur. Putem citi în acest fel textul lui Mallarmé, reducându-1 la un strălucitor idealism literar. Par, într-adevăr, să ne invite la o astfel de lectură întrebuinţarea frecventă a cuvântului Idee, adesea mărit şi personificat, parcă, printr-o majusculă, ca şi istoria pretinsului hegelianism al autorului. Şi puţini sunt cei care au refuzat invitaţia". - Jacques Derrida, *Diseminarea*, Univers Enciclopedic, 1997, p. 200 (trad. de Cornel Mihai Ionescu). În cazul de faţă nici eu nu „refuz invitaţia", pentru simplul motiv că „lectura... nu mai procedează aici ca o simplă listă de concepte sau de cuvinte, precum o punctare statică sau

statistică" (ibid.). Ea pune în evidenţă, acum, mecanismul de *Aufhebung* care operează, în mod inconştient, în orice proiect gnostic de soteriologie întemeiată pe antimimesis şi parodie a creaţiei divine.

[96] Paul Valéry, *Lettre d'un ami*, în Monsieur Teste (1896).

[97] Matila Ghyka, *The World Mine Oyster*, Heinemann, London, 1961, p. 272.

[98] *La cantique des colonnes.*

[99] Paul Valéry, *Eupalinos ou l'architecte*, Paris, NRF, Gallimard, 37c édition, 1924, pp.111-112.

[100] Id., *Introduction â la methode de Léonard de Vinci* (1895).

[101] Matila Ghyka, *The World Mine Oyster*, op. cit., p. 321.

[102] Platon, Opere, VII, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, pp. 168-169 (trad. de C. Partenie).

[103] Cf. Andrd Hermant, *L'architecture des plantes, Technique et Architecture,* Paris, 1947.

[104] Matila Ghyka, *Philosophie et mystique du nombre*, op. cit., p. 80.

[105] Ibid.

[106] Ibid.

[107] Ibid.,p. 68.

[108] G. Fr. W. Hegel, *Prelegeri de istorie a filozofiei*, Bucureşti, Editura Academiei R.P.R., 1963, voi. I,p. 192.

[109] Aristotel, *Metafizica*, 986 a, Bucureşti, IRI, 1996,p. 33.

[110] Ibidem, 291 b,pp. 40-41. Numărul,rezumă Hegel, „se află la mijloc, între sensibil şi gânduri (general, suprasensibil)... în consecinţă, numărul nu este de natură sensibilă, dar nu e încă nici gândul". (Hegel, op. cit., p. 191).

În opusculul *De substantiis separatis* (Despre substanţele separate) Toma din Aquino reproduce fidel atât „mitoza" „arheului" cât şi „suspensia" numerelor între arhetipuri şi formele sensibile: „.. .Platon distingea două feluri de lucruri separate de fiinţele sensibile, şi anume, formele matematice şi cele universale (*mathematica et universalia*), pe care le numea imagini sau idei (*species seu ideas*). Există totuşi această diferenţă între cele două, că în obiectele matematice putem vedea mai multe lucruri sub o singură figură... ceea ce nu este cu putinţă în cazul imaginilor, în care întregul unui lucru este prins în sensul general în idee. în felul acesta, obiectele matematice aşează un termen mediu între imagini sau idei şi lucrurile sensibile (*media inter species seu ideas et sensibilia*), care au acest raport cu obiectele materiale, că mai multe sunt cuprinse în aceeaşi idee. Şi se deosebesc de ele, precunf imaginile de materia sensibilă" (Opuseules de Saint Thomas d'Aquin, Paris, Li brairie philosophique Jules Vrin, 1986, pp. 156-157).

Pe urmele destinaţiei tomiste între Unul metafizic şi Unul matematic (*Summa theologiae*, I, XI, 3), Nicolaus Cusanus, în dialogul *Idiota (Profanul)* suprimă „suspensia" numărului între inteligibil şi sensibil, identificând „numărul divin" cu „forma" însăşi şi transferând asupra întregului univers „schizomorfia", „principiului" („formă" vs „număr"): Pitagoricienii, despre care spui că au aplicat tuturor lucrurilor o filosofie a numărului, sunt, după părerea mea, oameni serioşi şi subtili, dar nu cred că au vrut să vorbească despre număr ca despre o fiinţă matematică născută din gândirea noastră. Căci se înţelege de la sine că un astfel de nume nu poate fi principiu nimic. Mai curând, ei au vorbit în mod simbolic şi raţional de acest Număr care provine din Gândirea divină şi faţă de care numărul matematic este doar o imagine. Aceeaşi relaţie, care leagă gândirea noastră de Gândirea infinită şi veşnică se regăseşte între numărul

născut din gândirea noastră şi Numărul divin, iar noi îi aplicăm numele de număr, care ne este cunoscut, după cum aplicăm Gândirii divine numele gândiri noastre; şi resimţim o mare bucurie când ne adâncim în speculaţiile numerice, pentru că ele corespund propriei noastre opere", în (Euvres choisies de Nicolas de Cues, traduction et preface de Maurice de Gandillac, Paris, Aubier, Editions Montaigne, 1962, p. 274.

[111] Henri Bergson, *L'êvolution crêatrice*, 37c édition, Paris, Libraire F61ix Alean, 1930, p. 230. Prin afirmaţia surprinzătoare şi inexactă, potrivit căreia „Platon a erijat esenţele matematice în realităţi absolute", Bergson atribuie lui Platon esenţa gândirii pitagoreicilor, ignoră regimul „ninist" al „obiectelor matematice" şi distincţia între „forme" şi „numere" înlăuntrul „principiului" (cf. Philebos) şi parodiază involuntar poziţia lui Nicolaus Cusanus (op. cit., p. 229, n. 1).

[112] Matila Ghyka, *The World Mine Oyster*, op. cit., p. 56.

[113] Ibid.,pp. 54-55,307-309.

[114] Pitagora, spune Diogenes Laertios, era „fiul unui gravor de pietre preţioase", *Despre vieţile şi doctrinele filozofilor*, Bucureşti, Editura Academiei, R.P.R., 1963, Cartea VIII, cap. I, p. 395.